

А. Пуанкаре

ФИГУРЫ РАВНОВЕСИЯ ЖИДКОЙ МАССЫ



COURSE DE LA PHYSIQUE MATHÉMATIQUE

FIGURES D'ÉQUILIBRE

D'UNE
MASSE FLUIDE

Leçons professées à la Sorbonne en 1900

PAR

H. POINCARÉ

Membre de l'Institut

RÉDIGÉES PAR L. DREYFUS

Ancien élève de l'École normale supérieure



PARIS

GAUTHIER-VILLARS et C^{ie}

LIBRAIRES DU BUREAU DES LONGITUDES ET DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

55, Quai des Grands-Augustins, PARIS (6^e)

А. Пуанкаре

ФИГУРЫ РАВНОВЕСИЯ ЖИДКОЙ МАССЫ

Перевод с французского А.Р.Логунова

Под редакцией Б.П.Кондратьева

R&C
Dynamics

РХД

Москва • Ижевск

2000

УДК 517

Пуанкаре А.

Фигуры равновесия жидкой массы. — Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2000, 208 стр.

Книга представляет собой курс лекций, прочитанных А. Пуанкаре в Сорбонне в 1900 году, и является составной частью курса по математической физике.

В этой классической работе обсуждается теория потенциала, проблема Клеро, теория специальных функций. Особое внимание уделено вопросам устойчивости, приводятся результаты А. М. Ляпунова.

Для широкого круга читателей — физиков, математиков, историков науки.

ISBN 5-93972-022-6

© НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2000

<http://rzd.ru>

Содержание

Предисловие редактора перевода	6
ГЛАВА 1. Общие теоремы для ньютоновского потенциала	9
ГЛАВА 2. Однородная масса жидкости	19
ГЛАВА 3. Сферические функции	42
ГЛАВА 4. Неоднородная масса жидкости. Проблема Клеро	60
ГЛАВА 5. Твердое тело, покрытое слоем жидкости	96
ГЛАВА 6. Функции Ламэ	111
ГЛАВА 7. Притяжение эллипсоидов	133
ГЛАВА 8. Кольцо Сатурна	169
Комментарии редактора	200

Предисловие редактора перевода

Книги А. Пуанкаре увлекают, учат, восхищают. В студенческие годы я испытал это при изучении книги «Лекции по небесной механике». Навсегда осталось впечатление о силе аналитического метода в науке, великолепно продемонстрированной знаменитым французским ученым.

Предлагаемое сочинение Пуанкаре представляет один из 27 (!) курсов по математической физике для студентов Сорбонны, прочитанного в 1899 году. Главная тема этой книги пришла из задач астрономии: дана вращающаяся масса гравитирующей жидкости; требуется выяснить те формы, которые она может принимать в состоянии относительного равновесия.

Теория фигур равновесия имеет давнюю и интересную историю. Вначале развитие шло медленно. До 1885 г. ученый мир знал только две фигуры относительного равновесия — сфероиды Маклорена и эллипсоиды Якоби (кольца и эллипсоиды Римана здесь не в счет). К первым, открытым в 1742 г., успели привыкнуть и принять за эталон, со вторыми, известными с 1834 г., хотя и смирились, но иногда пеняли им за дерзкое покушение на столь любимую еще древними вращательную симметрию. Инерция мышления умеет маскироваться! Но каково же было удивление, когда в 1884 г. русский математик А. М. Ляпунов и годом позднее, в 1885 г., А. Пуанкаре совершенно независимо друг от друга открывают не одну и не две, а целый букет новых фигур равновесия. Оказывается, что в окрестности определенных сфероидов Маклорена и эллипсоидов Якоби (их множество бесконечное, хотя и счетное!) существуют неэллипсоидальные фигуры относительного равновесия, отдаленно напоминающие по форме то груши, то рубчатые дыни, волнистые патиссоны и другие фрукты и овощи. Вначале эти исследования ограничивались первым приближением, пренебрегая квадратами толщины возмущающего слоя, наложенного на жидкий эллипсоид. А вот безукоризненно строгое доказательство существования неэллипсоидальных форм дано Ляпуновым значительно позднее, в классической работе 1912 года.

Это блестящее открытие двух ученых открыло новую страницу в математической физике, сформировало круг любопытных идей и дало толчок развитию новых аналитических методов. Отсюда берут начало понятия о линейных сериях фигур равновесия, бифуркациях, нелинейных интегральных уравнениях. Был сделан шаг от идеальных поверхностей второго порядка к сложной реальности: действительно, у многих галактик и планет в их форме замечено присутствие третьих и более высоких гармоник.

В принципе, сама возможность существования новых равновесных форм следует из фундаментального факта: возмущение поверхности гравитирующего однородного эллипсоида гармониками третьего порядка, например, $\frac{\tau}{l} = a_0 x_1^3 + a_1 x_1 x_2^2 + a_2 x_1 x_3^2 + b x_1$, приводит к появлению возмущения потенциала, также описываемого полиномом третьего порядка от координат $\delta\varphi = A_0 x_1^3 + A_1 x_1 x_2^2 + A_2 x_2 x_3^2 + B x_1$. К слову, возможности математического аппарата до сих пор не позволяют провести полный нелинейный анализ данной проблемы и пока остается тайной, что же представляют собой неэллипсоидальные фигуры для большинства экзотических последовательностей вне малой окрестности от исходных эллипсоидов. Численные расчеты японских авторов в 1981–1983 гг. лишь отчасти прояснили ситуацию.

Пристальное внимание исследователей привлекла уже первая точка бифуркации на последовательности эллипсоидов Якоби, где берет начало последовательность грушевидных конфигураций. Согласно гипотезе Пуанкаре и Дарвина, если деформация исходного эллипсоида уже началась, то вдоль означенной последовательности грушевидность формы будет выявляться все более отчетливо и это приведет к делению вращающейся «груши» на две отдельные жидкие массы. На этом была построена стройная космогоническая картина происхождения двойных и кратных звезд и даже планетных систем. В дальнейшем эта красивая гипотеза не подтвердилась. Post factum, намек на иную судьбу грушевидной фигуры виден уже в том, что перешеек у «груши», едва угадываемый для первого члена ряда, отнюдь не становится более выраженным у фигуры и во втором приближении. Ляпунов в полемике с теми же Пуанкаре и Дарвином пришел к заключению о вековой неустойчивости всех грушевидных фигур данной последовательности, так что говорить о квазиравновесной эволюции вдоль нее вообще не имеет смысла. Правда считается, что при некоторых благоприятствующих обстоятельствах деление грушевидной фигуры могло бы произойти

катастрофически быстро, за характерное время динамической эволюции. Однако и такая возможность деления не может быть реализована, т. к. численным расчетом на компьютере выяснено, что последовательность грушевидных фигур «заканчивается» членом, у которого на суженном конце появляется «носик» (особая точка, где центробежная и гравитационная силы уравновешены).

Всего проблеме теории фигур равновесия Пуанкаре посвятил тринадцать статей и мемуаров и шесть из них — в год открытия, 1885 г. Впечатляет характерный для стиля Пуанкаре интеллектуальный напор — три обширных мемуара один за другим.

Книга состоит из восьми глав. Наряду с оригинальными результатами, в ней подробно разбирается знаменитая проблема Клеро о равновесии медленно вращающейся неоднородной жидкой массы, и более кратко — восходящая к Лапласу задача о равновесии жидкого слоя на твердой сфере. Даются также многие необходимые сведения по теории потенциала, сферическим функциям и функциям Ламэ. Последняя глава посвящена интересной задаче равновесия и устойчивости колец Сатурна, весьма актуальной и в наше время.

Перевод и редактирование данной книги потребовали довольно большой работы, в ходе которой были исправлены многочисленные неточности и опечатки оригинала. В некоторых местах доказательства Пуанкаре нельзя признать строгими, есть в них и просто ошибочные рассуждения, иногда имеющие, увы, принципиальный характер. Небольшие подстраничные замечания мы включили прямо в текст, более обстоятельные подробные комментарии вынесены в конец книги.

Однако все это не умаляет ценности и актуальности представляемой книги. В ней чувствуется обаяние оригинального ума, есть идеи, которые и сейчас еще мало разработаны. Книга будет полезна для научных работников в области механики, теоретической астрономии и физики.

ГЛАВА 1

ОБЩИЕ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ НЬЮТОНОВСКОГО ПОТЕНЦИАЛА

Цель курса. В данном курсе мы рассмотрим фигуры равновесия вращающейся массы жидкости. В таких системах действуют только внутренние силы, связанные с ньютоновским притяжением, когда две точки притягиваются с силой, прямо пропорциональной их массам и обратно пропорциональной квадрату расстояния между ними. Прежде всего, освежим в памяти некоторые известные сведения о ньютоновском потенциале.

Определение потенциала и его свойства. Точка с массой m притягивается всей остальной системой с силой, являющейся производной от потенциала V . Составляющие действующей на точку силы, т.е. ее проекции на оси координат, являются частными производными от одной и той же функции

$$m \frac{\partial V}{\partial x}, \quad m \frac{\partial V}{\partial y}, \quad m \frac{\partial V}{\partial z}.$$

Если притягивающиеся массы дискретны, потенциал определяется выражением:

$$V = \sum \frac{m_i}{r_i},$$

где r_i — расстояние между точкой с массой m и точкой с массой m_i .

Если эти массы непрерывны, то

$$V = \int \frac{\rho' d\tau'}{r},$$

где ρ' представляет собой плотность элемента объема $d\tau'$, r — расстояние от этого элемента до точки с массой m , а интеграл берется по всему притягивающему объему. Известно, что данный интеграл имеет смысл.

Если притягивающая масса распределена по поверхности с плотностью μ' , потенциал выражается формулой:

$$V = \int \frac{\mu' d\sigma'}{r}.$$

Наконец, если мы имеем дело с бесконечно тонким объемом толщиной ε' , тогда

$$d\tau' = \varepsilon' d\sigma'$$

и потенциал будет равен

$$V = \int \frac{\varepsilon' \rho' d\sigma'}{r}.$$

В объеме вне притягивающих масс и потенциал V , и его первые производные представляют собой непрерывные функции по всему пространству. Кроме того, известно, что

$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0.$$

Внутри, в точке с плотностью ρ ,

$$\Delta V = -4\pi\rho.$$

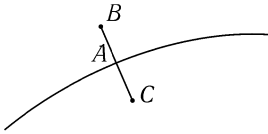


Рис. 1

На границе двух различных сред вторые производные потенциала терпят разрывы.

Что касается поверхности, функция V неразрывна по всему пространству, однако ее производные на самой поверхности терпят разрывы.

На нормали к точке A , лежащей на поверхности S (рис. 1), отметим точки B и C так, чтобы отрезки AB и AC равнялись соответственно dn_e и dn_i .

Если V_A — это потенциал в точке A , то потенциалы в точках B и C будут равны

$$V_B = V_A + \frac{\partial V}{\partial n_e} dn_e,$$

$$V_C = V_A + \frac{\partial V}{\partial n_i} dn_i.$$

К тому же

$$\frac{\partial V}{\partial n_e} + \frac{\partial V}{\partial n_i} = -4\pi\mu,$$

где μ — это поверхностная плотность притягивающей массы.

Предположим, что нормаль направлена наружу. Если ее направляющие косинусы обозначить через l , m , n , а значения частных производных снаружи и изнутри поверхности через

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_e, \quad \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)_e, \quad \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)_e; \quad \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_i, \quad \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)_i, \quad \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)_i,$$

то

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial n_e} &= l\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_e + m\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)_e + n\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)_e, \\ -\frac{\partial V}{\partial n_i} &= l\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_i + m\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)_i + n\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)_i. \end{aligned}$$

Теорема Гаусса. Гаусс доказал, что вне притягивающих масс функция V не имеет ни максимумов, ни минимумов в силу того, что $\Delta V = 0$.

Вообще говоря, если значение ΔV положительно или равно нулю, функция V не имеет максимумов, если же значение ΔV отрицательно или равно нулю, функция V не имеет минимумов. В рассматриваемом случае ΔV равно нулю либо отрицательно; следовательно, функция V не имеет минимумов, а в области вне действующих масс — и максимумов.

Таким образом, если на поверхности, не содержащей притягивающих масс, значение функции V заключено между числами g и h , то во всякой точке, расположенной внутри поверхности, будет верно неравенство $g < V < h$.

Теорема Грина. Если U и V суть непрерывные функции внутри объема T , ограниченного поверхностью S , то выполняется следующее равенство:

$$\int_S U \frac{\partial V}{\partial n} d\sigma = \int_T U \Delta V d\tau + \int_T \left(\frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial z} \frac{\partial V}{\partial z} \right) d\tau. \quad (1)$$

Поменяв местами U и V и вычтя полученное равенство из равенства (1), получим следующее выражение:

$$\int_S \left(U \frac{\partial V}{\partial n} - V \frac{\partial U}{\partial n} \right) d\sigma = \int_T \left(U \Delta V - V \Delta U \right) d\tau. \quad (2)$$

Частные случаи равенства (1): при $U = 1$

$$\int_S \frac{\partial V}{\partial n} d\sigma = \int_T \Delta V d\tau; \quad (3)$$

а при $U = V$

$$\int_S V \frac{\partial V}{\partial n} d\sigma = \int_T V \Delta V d\tau + \int_T \left[\left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z} \right)^2 \right] d\tau. \quad (4)$$

Если функция V удовлетворяет уравнению Лапласа, $\Delta V = 0$, то

$$\int_S V \frac{\partial V}{\partial n} d\sigma = \int_T \left[\left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z} \right)^2 \right] d\tau, \quad (5)$$

причем и первый, и второй члены здесь положительны.

Если функции U и V описывают потенциалы точек, находящихся на сфере достаточно большого радиуса, то их значения составляют величины порядка $1/R$, а значения их первых производных — порядка $1/R^2$. В этом случае возможно применить формулу (1) для описания пространства снаружи поверхности S , но внутри некоторой другой сферы очень большого радиуса. Если этот радиус достаточно велик, то интеграл, взятый по поверхности сферы φ , пренебрежимо мал, т. е. порядка $1/R$. Однако существует следующее соотношение:

$$\int_S U \frac{\partial V}{\partial n_e} d\sigma + \int_S U \frac{\partial V}{\partial n_i} d\sigma = 0,$$

так как элементы интеграла взаимно уничтожаются.

Что касается интегралов от вторых членов, их сумма дает интегралы по всей области. После сложения двух полученных равенств имеет место следующее равенство:

$$\int U \Delta V d\tau + \int \left(\frac{\partial V}{\partial x} \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial z} \frac{\partial U}{\partial z} \right) d\tau = 0, \quad (6)$$

и интегралы здесь берутся по всему пространству.

Формула (2) дает

$$\int (U \Delta V - V \Delta U) d\tau = 0,$$

и, учитывая, что

$$\begin{aligned} -\Delta V &= 4\pi\rho, \\ -\Delta V_1 &= 4\pi\rho_1, \end{aligned}$$

мы получим следующую формулу:

$$\int (V_1\rho - V\rho_1) d\tau = 0, \quad (7)$$

где интегрирование производится по всему пространству.

Формулу, аналогичную вышеприведенной, можно встретить в теории электричества:

$$\sum mV_1 - \sum m_1V = 0.$$

Произведем следующие подстановки в формуле (7):

$$V_1 = V + dV, \quad \rho_1 = \rho + d\rho;$$

в результате получим выражение:

$$\int (V d\rho - \rho dV) d\tau = 0. \quad (8)$$

Работа сил притяжения. Представим себе систему масс m', m'', \dots и т. д., испытывающую притяжение со стороны другой системы масс m'_1, m''_1, \dots

Пусть V'_1, V''_1, \dots есть потенциалы точек m', m'', \dots относительно притягивающих масс m'_1, m''_1, \dots , а V', V'', \dots — потенциалы точек m'_1, m''_1, \dots относительно притягивающих масс m', m'', \dots

При перемещении притягивающих масс совершается следующая работа:

$$\varepsilon = \sum m \left(\frac{\partial V_1}{\partial x} \delta x + \frac{\partial V_1}{\partial y} \delta y + \frac{\partial V_1}{\partial z} \delta z \right),$$

где $\delta x, \delta y, \delta z$ есть смещения точки с массой m ; или

$$\varepsilon = \sum m \delta V_1.$$

Произведя подстановку

$$\Pi = \sum mV_1,$$

получим следующее выражение:

$$\varepsilon = \delta\Pi.$$

Если перемещаются притягивающие массы, потенциал V_1 принимает вид $V_1 + \delta'V_1$ и имеет место следующее равенство:

$$\delta'\Pi = \sum m\delta'V_1'.$$

Если же эти два перемещения происходят одновременно, то

$$\varepsilon = \delta\Pi + \delta'\Pi.$$

Предположим, что притягиваемые массы образуют объем T , в этом случае

$$\Pi = \int_T \rho V_1 d\tau.$$

Впрочем, интегрирование может проводиться и по всему пространству, поскольку вне объема T значение ρ равно нулю. Отсюда

$$\delta\Pi = \int V_1 \delta\rho d\tau,$$

где интегрирование также проводится по всему пространству.

Если притягивающая масса равна притягиваемой массе, то $V = V_1$ и

$$\delta\Pi = \int V \delta\rho d\tau.$$

Принимая во внимание равенство (8), это можно записать следующим образом:

$$\delta\Pi = \int \rho \delta V d\tau$$

или

$$\delta\Pi = \int \frac{\rho \delta V + V \delta\rho}{2} d\tau.$$

Допустим теперь, что

$$W = \int \frac{\rho V}{2} d\tau,$$

где W — энергия системы, а интегрирование всегда производится по всему пространству.

Имеет место следующее соотношение:

$$\delta W = \varepsilon.$$

Поскольку $\Delta V = -4\pi\rho$, можно записать следующее:

$$W = -\frac{1}{8\pi} \int V \Delta V d\tau$$

и, учитывая равенство (6),

$$W = \frac{1}{8\pi} \int \left[\left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z} \right)^2 \right] d\tau. \quad (9)$$

Здесь интегрирование всегда производится по всему пространству.

Условия равновесия. А теперь, учитывая вышеизложенное, приступим к изучению задачи, которую мы перед собой поставили.

Рассмотрим жидкую массу, изолированную от всякого внешнего влияния и вращающуюся вокруг неподвижной оси, которую мы обозначим через Oz ; движение происходит равномерно с угловой скоростью ω . Введем также оси Ox и Oy , жестко связанные с жидкой массой.

Пусть p — это давление в точке с координатами (x, y, z) ; p зависит только от координат x, y, z ; силу, действующую на единицу объема $d\tau$, можно представить как сумму трех составляющих:

$$X = \frac{\partial p}{\partial x} d\tau, \quad Y = \frac{\partial p}{\partial y} d\tau, \quad Z = \frac{\partial p}{\partial z} d\tau.$$

Запишем условия относительного равновесия, заметив, что кориолисово ускорение равно нулю. Обозначив через X, Y и Z составляющие, или проекции на координатные оси, силы, действующей на молекулу с координатами (x, y, z) , получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} X = \rho \frac{\partial V}{\partial x} + \omega^2 \rho x, \\ Y = \rho \frac{\partial V}{\partial y} + \omega^2 \rho y, \\ Z = \rho \frac{\partial V}{\partial z}, \end{cases}$$

а допустив, что

$$U = V + \frac{\omega^2}{2} (x^2 + y^2),$$

получим

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \rho \frac{\partial U}{\partial x}, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = \rho \frac{\partial U}{\partial y}, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = \rho \frac{\partial U}{\partial z},$$

откуда следует

$$\frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz = \rho \left(\frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz \right),$$

$$dp = \rho dU.$$

Из данного соотношения видно, что ρ зависит только от p ; таким образом, U также зависит только от p и, следовательно, от ρ . На основании вышеизложенного можно сформулировать следующую теорему:

Теорема. *Если жидкая масса, совершающая вращательное движение вокруг неподвижной оси, находится в относительном равновесии, то уровенные поверхности являются поверхностями равного давления, а также равной плотности.*

На поверхности жидкости $p = 0$.¹ Следовательно, на ней U есть величина постоянная, и такая свободная поверхность представляет собой уровенную поверхность.

При отсутствии вращения $U = V$.

В общем случае имеет место соотношение $\Delta V = -4\pi\rho$. Таким образом, ΔV есть функция от U .

Заметим, что суммарная сила с компонентами $\frac{\partial U}{\partial x}$, $\frac{\partial U}{\partial y}$, $\frac{\partial U}{\partial z}$ в общем случае нормальна к уровенным поверхностям $U = C$.

Эти условия равновесия являются необходимыми.

Кроме того, необходимым и достаточным условием равновесия является следующее: результирующая работа виртуального смещения должна быть равна нулю. Эта работа состоит из работы сил притяжения и работы, совершаемой центробежной силой.

¹Это лишь частный случай. В общем же давление на поверхности фигуры относительного равновесия обязано быть просто постоянным. (Здесь и далее — примечания редактора, кроме случаев, оговоренных особо.)

Первую из них, δW , мы уже рассматривали, вторая же определяется из следующего выражения:

$$\int \rho d\tau (\omega^2 x \delta x + \omega^2 y \delta y) = \int \rho d\tau \delta \frac{\omega^2 (x^2 + y^2)}{2} = \delta \frac{\omega^2}{2} \int \rho (x^2 + y^2) d\tau.$$

Если J — момент инерции по отношению к оси Oz , то работа центробежной силы равна

$$\delta \frac{\omega^2}{2} J,$$

а условие равновесия выглядит следующим образом:

$$\delta W + \frac{\omega^2}{2} \delta J = 0$$

для всякого смещения, согласованного со связями системы.

Данное условие не обязательно предполагает, что

$$W + \frac{\omega^2}{2} J$$

будет максимальным; для этого должны быть соблюдены также некоторые другие условия, однако когда эта функция достигает максимума, равновесие устойчиво¹.

Пусть T — относительная живая сила. Имеем

$$T - \left(W + \frac{\omega^2}{2} J \right) = C^{\text{те}}.$$

Допустим, что $W + \frac{\omega^2}{2} J = \tilde{U}$,² и обозначим максимальное значение \tilde{U} через \tilde{U}_0 .

Имеет место следующее равенство:

$$T - \tilde{U} = T_0 - \tilde{U}_0.$$

Теперь присвоим функции \tilde{U} некое значение $\tilde{U} < \tilde{U}_0$, а функции T — значение α , и получим в результате

$$T - \tilde{U} = T_0 - \tilde{U}_0, \quad T = \alpha - (\tilde{U}_0 - \tilde{U}).$$

Живая сила T в каждый из последующих моментов будет меньше T_0 . Таким образом, равновесие устойчиво.

¹Это — условие устойчивости по Кельвину.

²В оригинале тильда отсутствует, что может внести путаницу, поскольку несколько выше под U понимается другая функция.

Соотношение между массой, объемом и скоростью вращения. Одним из необходимых условий равновесия является следующее: сила, действующая на любую из точек свободной поверхности, должна быть направлена внутрь, иначе эта точка отделится от системы. Таким образом, должно соблюдаться неравенство $\frac{\partial U}{\partial n_e} < 0$ и, как следствие,

$$\int_S \frac{\partial U}{\partial n_e} d\sigma < 0.$$

Учитывая формулу (3), данное неравенство можно преобразовать к следующему виду:

$$\int_T \Delta U d\tau < 0.$$

Следовательно, должно соблюдаться неравенство

$$\int_T \Delta V d\tau + \int_T 2\omega^2 d\tau < 0,$$

т. е.

$$-4\pi \int_T \rho d\tau + \int_T 2\omega^2 d\tau < 0.$$

Обозначив объем через T , а массу через M , получим

$$-4\pi M + 2\omega^2 T < 0.$$

В частном случае постоянной плотности ρ формула преобразуется к следующему виду:

$$2\omega^2 < 4\pi\rho. \quad [1]^1$$

При применении данной формулы следует помнить, что единицы измерения выбраны так, что ньютоновская сила притяжения выражается формулой²

$$f = \frac{mm'}{r^2}.$$

¹Ссылки в квадратных скобках указывают на комментарии редактора, приведенные в конце книги.

²Здесь гравитационная постоянная $G = 1$.

ГЛАВА 2

ОДНОРОДНАЯ МАССА ЖИДКОСТИ

СЛУЧАЙ НЕВРАЩАЮЩЕЙСЯ МАССЫ ЖИДКОСТИ

Упрощение общих формул. Рассмотрим теперь частный случай однородной невращающейся массы жидкости.

Применяя общие теоремы, можно обнаружить, что свободная поверхность должна быть также и поверхностью эквипотенциальной, $V = V_0$.

Если принять плотность рассматриваемой жидкости за единицу, то потенциал в некоторой точке будет иметь вид:

$$V = \int_T \frac{d\tau}{r}.$$

Потенциальная энергия точки в этом случае равна

$$\int_T \frac{\rho V d\tau}{2} = \int_T \frac{V d\tau}{2}.$$

Функция V непрерывна во всей области — так же, как и на свободной поверхности; она обращается в нуль, когда ее аргумент стремится к бесконечности; снаружи притягивающего объема она не имеет ни максимумов, ни минимумов и заключена между 0 и V_0 ; внутри функция имеет максимум, и ее значение больше V_0 .

Интеграл $\int \frac{\partial V}{\partial n} d\sigma$, взятый по некоторой замкнутой поверхности, окружающей рассматриваемую массу жидкости, равен интегралу $\int \Delta V d\tau$, который берется по объему, ограниченному этой поверхностью. Известно, что $\int \Delta V d\tau = -4\pi \int \rho d\tau = -4\pi M$.

Эта теорема верна и для участка поверхности. Она применима вне зависимости от того, пуст окруженный поверхностью объем или заполнен жидкостью. Кроме того, ее можно применять и к случаю поверхностного распределения масс.

Поскольку мы предполагаем, что рассматриваемый объем однороден и имеет единичную плотность, то верно следующее:

$$\int_S \frac{\partial V}{\partial n} d\sigma = \int_T \Delta V d\tau = - \int 4\pi\rho d\tau = -4\pi T,$$

где T — объем массы жидкости, а S — поверхность, содержащая в себе весь этот объем, включая и саму поверхность.

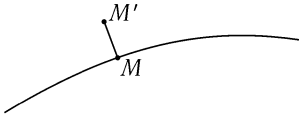


Рис. 2

Проведем нормаль из точки M поверхности наружу и отметим на этой нормали точку M' так, чтобы $MM' = dn_e$ (рис. 2). Тогда потенциал в точке M' будет иметь вид

$$V_{M'} = V_M + \frac{\partial V}{\partial n} dn_e.$$

Однако

$$V_{M'} < V_M,$$

что означает

$$\frac{\partial V}{\partial n_e} < 0.$$

Очевидно, это условие необходимо для равновесия: в данном случае оно всегда выполняется.

Пусть V_0 — потенциал жидкого тела на его поверхности. Предположим теперь, что существует некий электрически заряженный слой массы M , находящийся в равновесии с этим телом и создающий в пространстве потенциал V' , причем такой, что на поверхности и внутри объема жидкости $V' = V_0$.

Вне объема жидкости $V' = V$. В самом деле, на поверхности $V' = V_0$, а на бесконечном удалении от нее $V' = 0$. Однако функции V' и V удовлетворяют уравнению Лапласа, и их значения на поверхности жидкой массы и на поверхности сферы очень большого радиуса одинаковы. Следовательно, эти две функции совпадают; в этом и заключается принцип Дирихле.

Согласно известным формулам,

$$\int \frac{\partial V'}{\partial n} d\sigma = -4\pi M.$$

Однако известно, что

$$\int \frac{\partial V'}{\partial n} d\sigma = \int \frac{\partial V}{\partial n} d\sigma = -4\pi T.$$

Таким образом, масса M , распределенная по поверхности, имеет значение T , и наоборот; если $M = T$, то $V' = V$.

Величину $\frac{T}{V_0}$ называют электрической емкостью тела¹. Это понятие мы используем впоследствии при решении поставленной задачи.

Теория Ляпунова. [2] Наиболее очевидной фигурой равновесия является сфера, но существуют ли другие фигуры равновесия? Этого мы не знаем. Однако, если речь идет о фигурах устойчивого равновесия, то задача выглядит несколько иначе.

В случае сферического тела функция W достигает своего абсолютного максимума, однако мы не можем утверждать *a priori*, что W не имеет других, относительных, максимумов. Невозможность существования таких максимумов была доказана Ляпуновым. Доказательство достаточно длинно и производится по этапам.

Существование максимума энергии. Потенциал тела любого объема в произвольной его точке меньше потенциала сферического тела того же объема в его центре.

Вокруг точки M , принадлежащей телу S , опишем сферу Σ того же объема (рис. 3).

Тело S делится на два объема: объем K внутри сферы Σ и объем A снаружи.

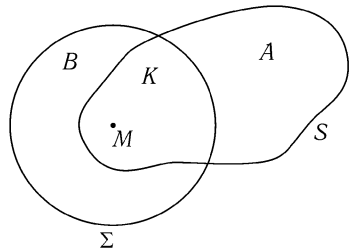


Рис. 3

Пусть B — часть объема сферы Σ , находящаяся вне тела S .

По условию, $B = A$.

¹В данном контексте под T следует понимать полный электрический заряд тела.

Если R — это радиус сферы, то

$$\text{Потенциал } A < \frac{A}{R},$$

$$\text{Потенциал } B > \frac{B}{R} = \frac{A}{R}.$$

Отсюда

$$\text{Потенциал } B > \text{Потенциал } A,$$

$$\text{Потенциал } S = \text{Потенциал } K + \text{Потенциал } A,$$

$$\text{Потенциал } \Sigma = \text{Потенциал } K + \text{Потенциал } B.$$

Следовательно,

$$\text{Потенциал } \Sigma > \text{Потенциал } S.$$

Если V — потенциал в точке M , а R — радиус сферы Σ , то

$$V < 2\pi R^2.$$

Таким образом, энергия, равная

$$\int \frac{V d\tau}{2},$$

оказывается меньше, чем

$$\pi R^2 \int d\tau;$$

то есть

$$W < \pi R^2 T,$$

где T — объем тела.

Учитывая, что, согласно определению R ,

$$T = \frac{4}{3}\pi R^3,$$

получим

$$W < \frac{4}{3}\pi^2 R^5.$$

Таким образом, энергия W в объеме T ограничена сверху; следовательно, функция W имеет максимум. Я утверждаю, что этот максимум меньше максимальной энергии тела со сферической внешней поверхностью.

Однако докажем прежде следующую теорему:

Существование минимума электростатической емкости.

Из всех тел одинакового объема сфера имеет наименьшую электростатическую емкость.

Действительно, из формулы (9) (стр. 15) мы знаем, что

$$W = \frac{1}{8\pi} \int \left[\left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z} \right)^2 \right] d\tau,$$

интегрирование здесь производится по всему пространству.

Предположим, что поверхность проводящего тела объема T покрыта электрически заряженным слоем массы¹ T и что система находится в равновесии. Если обозначить соответствующий потенциал через V' , то, согласно определению емкости C проводника, на поверхности тела будет верно следующее равенство:

$$CV' = T.$$

Внутри тела потенциал V' постоянен; снаружи V' удовлетворяет уравнению $\Delta V' = 0$ и обращается в нуль при бесконечном удалении от тела.

Согласно известной формуле, электрическая энергия² равна:

$$W' = \frac{1}{2} CV'^2 = \frac{1}{2} \frac{T^2}{C}.$$

Однако существует и другая формула:

$$W' = \frac{1}{8\pi} \int \left[\left(\frac{\partial V'}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial V'}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial V'}{\partial z} \right)^2 \right] d\tau,$$

интегрирование здесь производится либо по всему пространству, либо только по внешнему объему, поскольку внутри объема функция V постоянна.

Теперь докажем, что в случае однородного тела единичной плотности электрическая энергия W' меньше энергии W ньютоновского потенциала.

Предположим, что потенциал $V = V' + U$, тогда

$$W = \frac{1}{8\pi} \int \left\{ \left[\frac{\partial(V' + U)}{\partial x} \right]^2 + \left[\frac{\partial(V' + U)}{\partial y} \right]^2 + \left[\frac{\partial(V' + U)}{\partial z} \right]^2 \right\} d\tau,$$

¹См. прим. к стр. 21.

²По смыслу здесь и ниже лучше говорить «электростатическая энергия».

интегрирование производится по всему пространству. Очевидно,

$$\begin{aligned} W = & \frac{1}{8\pi} \int \left[\left(\frac{\partial V'}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial V'}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial V'}{\partial z} \right)^2 \right] d\tau + \\ & + \frac{2}{8\pi} \int \left(\frac{\partial V'}{\partial x} \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V'}{\partial y} \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V'}{\partial z} \frac{\partial U}{\partial z} \right) d\tau + \\ & + \frac{1}{8\pi} \int \left[\left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z} \right)^2 \right] d\tau. \end{aligned}$$

Первый интеграл здесь представляет собой W' .

Второй интеграл раскладывается на два. Первый из них, взятый по внутреннему объему тела, равен нулю, поскольку

$$\frac{\partial V'}{\partial x} = \frac{\partial V'}{\partial y} = \frac{\partial V'}{\partial z} = 0.$$

Второй же, взятый по внешнему объему, преобразуется по формуле Грина к следующему виду:

$$\int_S V' \frac{\partial U}{\partial n_e} d\sigma - \int V' \Delta U d\tau.$$

Второй из этих двух интегралов равен нулю, так как ΔU снаружи равно нулю. Первый интеграл также равен нулю. В самом деле, V' на поверхности постоянно и равно V'_0 . Таким образом, второй интеграл можно записать следующим образом:

$$V'_0 \int \frac{\partial U}{\partial n_e} d\sigma = V'_0 \int \frac{\partial V}{\partial n_e} d\sigma - V'_0 \int \frac{\partial V'}{\partial n_e} d\sigma,$$

но

$$\int \frac{\partial V}{\partial n_e} d\sigma = 4\pi T, \quad \int \frac{\partial V'}{\partial n_e} d\sigma = 4\pi T;$$

и, следовательно, этот интеграл действительно равен нулю.

Учитывая вышеизложенное,

$$\int \left(\frac{\partial V'}{\partial x} \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V'}{\partial y} \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V'}{\partial z} \frac{\partial U}{\partial z} \right) d\tau = 0.$$

Третий же интеграл не равен нулю, так как внутри тела U не равно нулю, поскольку V' здесь постоянно, а V — перемененно.

Третий интеграл, таким образом, положителен и верно следующее:

$$W > W'.$$

Объединив два ранее полученных результата, запишем неравенство:

$$\pi R^2 T > W > \frac{T^2}{2C},$$

откуда

$$C > \frac{T}{2\pi R^2},$$

и, наконец,

$$C > \frac{2R}{3},$$

следовательно, C имеет минимум. Я утверждаю, что этот минимум емкости может быть достижим лишь для сферического тела.

Минимальное значение емкости. Предположим, что некое проводящее тело имеет такую форму, при которой электростатическая емкость минимальна. В этом случае

$$2W' = \frac{M^2}{C} = \frac{1}{4\pi} \int \left[\left(\frac{\partial V'}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial V'}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial V'}{\partial z} \right)^2 \right] d\tau.$$

Обозначив производную по нормали к эквипотенциальной поверхности, проходящей через точку (x, y, z) , через $\frac{\partial V'}{\partial n}$, можно записать

$$2W' = \frac{1}{4\pi} \int \left(\frac{\partial V'}{\partial n} \right)^2 d\tau.$$

Деформируем проводник таким образом, чтобы элемент поверхности $d\sigma$ перешел в элемент $d\sigma'$ (рис. 4). Обозначим проекцию смещения элемента $d\sigma$ на нормаль к поверхности через ζ , сохраняя знак.

Тогда приращение объема равно:

$$\int \zeta d\sigma,$$

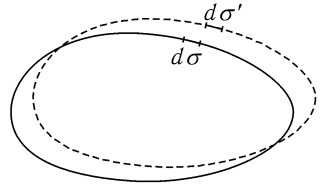


Рис. 4

а интеграл увеличится на

$$\frac{M^2 dC}{C^2} = \int \frac{\zeta d\sigma}{4\pi} \left[\left(\frac{\partial V'}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial V'}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial V'}{\partial z} \right)^2 \right] = \frac{1}{4\pi} \int \left(\frac{\partial V'}{\partial n} \right)^2 \zeta d\sigma.$$

Это значит, что потенциал остается постоянным; однако, согласно условию, тело находится в равновесии. Следовательно, функция $\frac{M^2}{C}$ имеет минимум, а изменение интеграла, связанное с изменением потенциала, равно нулю, так как этот интеграл имеет наименьшее значение.

Обозначив поверхностную плотность через μ , получим

$$\frac{\partial V}{\partial n} = -4\pi\mu.$$

Отсюда

$$\frac{M^2 dC}{C^2} = \int 4\pi\mu^2 \zeta d\sigma = 4\pi \int \mu^2 \zeta d\sigma.$$

Однако dC должно быть равно нулю, следовательно,

$$\int \mu^2 \zeta d\sigma = 0.$$

В то же время, учитывая, что, по определению ζ , $\int \zeta d\sigma = 0$, значение μ должно быть постоянным.

Известно, впрочем, что $M = \mu S$, где S — площадь поверхности проводника, следовательно,

$$\frac{S^2 dC}{C^2} = 4\pi dT.$$

Предположим теперь, что проводник деформируется, оставаясь подобным самому себе: его емкость изменяется прямо пропорционально кубическому корню из объема, и имеет место соотношение

$$\frac{dC}{C} = \frac{1}{3} \frac{dT}{T};$$

откуда заключаем, что

$$S^2 = 12\pi TC.$$

Таким образом, для любого тела, обладающего минимальной электростатической емкостью, выполняется данное соотношение между емкостью, объемом и площадью поверхности.

Однако в таком случае для всех тел одинакового объема емкость минимальна, если минимальна площадь поверхности, а из всех тел одинакового объема наименьшей площадью поверхности обладает сфера. Следовательно, именно сферическое тело имеет наименьшую электростатическую емкость.

Наконец, мы приступаем к завершающему этапу доказательства.

Сфера — единственная фигура равновесия. Я утверждаю, что значение W максимально, если тело объема T имеет форму сферы.

Пусть T — соответствующий объем, тогда

$$dT = \int \zeta d\sigma$$

— это приращение объема (рис. 4).

Как известно,

$$W = \int \frac{\rho V}{2} d\tau, \quad dW = \int \frac{\rho dV + V d\rho}{2} d\tau = \int V d\rho d\tau.$$

Поскольку мы предположили, что плотность тела равна 1, то $d\rho$ равно -1 , 0 или 1 . Если тело находится в равновесии, то вблизи его поверхности, являющейся эквипотенциальной поверхностью, $d\rho = 0$, т. е. если функция V постоянна, то

$$dW = V_0 \int d\rho d\tau.$$

Интеграл здесь равен dT . Таким образом,

$$dW = V_0 dT.$$

Возможно установить еще одно соотношение между dW и dT .

Предположим, что тело изменяется, оставаясь подобным самому себе. В этом случае энергия изменяется пропорционально степени $\frac{5}{3}$ его объема. Отсюда

$$\frac{dW}{W} = \frac{5}{3} \frac{dT}{T}.$$

Сократив dW и dT в двух последних равенствах, получим

$$W = \frac{3}{5} V_0 T.$$

Согласно определению W , величину $\frac{2W}{T}$ можно назвать средним потенциалом, он равен $\frac{6}{5} V_0$.

Однако W , кроме того, определяется следующим интегралом:

$$\frac{1}{8\pi} \int \left[\left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z} \right)^2 \right] d\tau,$$

взятым по всему пространству.

Часть его, взятая по внутренней области, по формуле Грина (4) равна

$$\frac{1}{8\pi} \int_S V \frac{\partial V}{\partial n} d\sigma - \frac{1}{8\pi} \int_T V \Delta V d\tau.$$

На поверхности функция V постоянна. Таким образом, имеем интеграл

$$\frac{V_0}{8\pi} \int_S \frac{\partial V}{\partial n} d\sigma - \frac{1}{8\pi} \int_T V \Delta V d\tau,$$

который, поскольку $-\Delta V = 4\pi\rho = 4\pi$, преобразуется непосредственно к следующему виду:

$$\begin{aligned} \frac{V_0}{8\pi} \int \Delta V d\tau - \frac{1}{8\pi} \int V \Delta V d\tau &= -\frac{V_0}{2} \int d\tau + \int \frac{V d\tau}{2} = \\ &= -\frac{V_0 T}{2} + W = -\frac{5}{6}W + W = \frac{1}{6}W. \end{aligned}$$

Таким образом, если тело находится в равновесии, соотношение между частью интеграла, взятой по внутреннему объему, и его частью, взятой по внешнему объему, постоянно и равно $\frac{1}{5}$.

Но энергия тела обратно пропорциональна его электростатической емкости.

Отсюда можно заключить, что тело сферической формы обладает наибольшей энергией W [3].

СЛУЧАЙ ВРАЩАЮЩЕЙСЯ МАССЫ ЖИДКОСТИ

Общие формулы. Предположим теперь, что однородное жидкое тело вращается вокруг закрепленной оси со скоростью ω .

Обозначим момент инерции относительно данной оси вращения через J

$$J = \int d\tau (x^2 + y^2).$$

При изменении формы тела момент J также изменяется. Обозначив проекцию смещения элемента поверхности $d\sigma$ на нормаль через ζ , получим

$$dJ = \int \zeta d\sigma (x^2 + y^2).$$

Функция

$$V + \frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2)$$

была ранее обозначена через U .

Функция W — это всегда энергия ньютоновского потенциала.

Имеет место следующее равенство:

$$dW + \frac{\omega^2}{2}dJ = \int \zeta \left[V + \frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2) \right] d\sigma = \int U \zeta d\sigma.$$

На поверхности равновесия U постоянна и равна U_0 .

Следовательно,

$$dW + \frac{\omega^2}{2}dJ = U_0 \int \zeta d\sigma = U_0 dT.$$

Как известно, если тело деформируется, оставаясь подобным себе, W и J изменяются пропорционально T в степени $\frac{5}{3}$.¹

Таким образом,

$$\frac{dW + \frac{\omega^2}{2}dJ}{W + \frac{\omega^2}{2}J} = \frac{5}{3} \frac{dT}{T};$$

и, следовательно,

$$\frac{3}{5}U_0T = W + \frac{\omega^2}{2}J = \tilde{U}.^2$$

Известно, что

$$\Delta U = 2\omega^2 + \Delta V = 2\omega^2 - 4\pi\rho = 2\omega^2 - 4\pi.$$

¹Справедливо только для однородных тел.

²См. прим. 3 на стр. 17.

Как уже отмечалось (стр. 18), одно из необходимых условий равновесия имеет вид:

$$2\omega^2 \leq 4\pi,$$

т.е. значение ΔU — отрицательно.

Следовательно, функция U внутри тела не может иметь минимума и, так как на поверхности она постоянна и равна U_0 , внутри тела $U > U_0$.

Если $\Delta U = 0$, U постоянна и равна U_0 .

Наконец, если ΔU положительна, то во всем объеме тела U будет меньше U_0 .

Рассмотрим интеграл

$$\int U d\tau = 2W + \frac{\omega^2}{2} J.$$

В зависимости от знака ΔU , интеграл будет больше или меньше следующего выражения либо равен ему:

$$\int U_0 d\tau = U_0 \int d\tau = U_0 T = \frac{5}{3} \left(W + \frac{\omega^2}{2} J \right).$$

Таким образом, здесь можно различать три случая:

$$\Delta U < 0 \quad \frac{5}{3} \left(W + \frac{\omega^2}{2} J \right) < 2W + \frac{\omega^2}{2} J \quad W > \omega^2 J,$$

$$\Delta U = 0 \quad \frac{5}{3} \left(W + \frac{\omega^2}{2} J \right) = 2W + \frac{\omega^2}{2} J \quad W = \omega^2 J,$$

$$\Delta U > 0 \quad \frac{5}{3} \left(W + \frac{\omega^2}{2} J \right) > 2W + \frac{\omega^2}{2} J \quad W < \omega^2 J.^1$$

Предел скорости вращения. Предположим теперь, что угловая скорость ω непрерывно изменяется. Вследствие этого тело непрерывно деформируется², и имеет место следующее равенство:

$$dW + \frac{\omega^2}{2} dJ + \omega J d\omega = \frac{3}{5} T dU_0.$$

¹В действительности же последнее неравенство имеет чисто формальный смысл, поскольку требует нарушения «табу» — неравенства Пуанкаре для ω .

²Объем или масса при этом удерживаются постоянными.

Так как предполагается, что фигура находится в равновесии, значение $W + \frac{\omega^2}{2}J$ максимально или минимально, и в любом случае верно следующее:

$$dW + \frac{\omega^2}{2} dJ = 0.$$

Тогда

$$\omega J d\omega = \frac{3}{5} T dU_0,$$

и, следовательно,

$$\frac{dU_0}{d\omega} > 0.^1$$

Функция U_0 возрастает, когда возрастает ω .

Поскольку V — это ньютоновский потенциал, на поверхности выполняется следующее равенство:

$$V = U_0 - \frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2).$$

Таким образом, U_0 — это ньютоновский потенциал на полюсе вращающегося тела, т.е. в точке пересечения поверхности тела с осью вращения. При увеличении скорости вращения потенциал также увеличивается. Впрочем, U_0 не может превысить $2\pi R^2$ (см. стр. 22), где R — радиус сферы того же объема.

Поделив равенства, получим

$$\frac{\omega J d\omega}{W + \frac{\omega^2}{2}J} = \frac{dU_0}{U_0}. \quad [4]$$

Если бесконечно увеличивать ω , то настанет момент, когда ω^2 превысит π , а энергия W окажется меньше $\omega^2 J$;

$$\frac{\omega^2 J}{\frac{\omega^2}{2}J + W} > \frac{2}{3},$$

и, как следствие,

$$\frac{2}{3} \frac{d\omega}{\omega} < \frac{dU_0}{U_0}.$$

¹Любопытное неравенство, выражающее одно из важных свойств фигуры относительного равновесия.

При бесконечном увеличении скорости ω потенциал U_0 также должен бесконечно увеличиваться. Однако известно, что U_0 не может превысить $2\pi R^2$. Следовательно, необходимо, чтобы перестала увеличиваться скорость ω либо чтобы поверхность равновесия не пересекала больше оси вращения. В последнем случае тело приобретает форму кольца.

Далее мы увидим, что к фигурам равновесия относятся эллипсоиды вращения и эллипсоиды с тремя неравными осями. Для первых $\omega < 4\pi \times 0,112$, для вторых — $\omega < 4\pi \times 0,093$.

Также возможно существование ряда фигур равновесия, для которых ω принимает бесконечное количество максимальных либо минимальных значений. К этому случаю наше рассуждение неприменимо, и ω может увеличиваться до бесконечности.

Постоянство оси вращения. До сих пор нас не занимало, равномерно ли происходит вращение массы жидкости.

Зададимся вопросом, возможно ли существование фигур относительного равновесия в случае жидкой массы, вращающейся неравномерно.

Далее будет доказано, что это невозможно.

Прежде всего можно предположить, что поскольку к телу не приложено никакой внешней силы, то центр тяжести тела неподвижен либо его движение можно считать прямолинейным и равномерным.

Равновесие не нарушится, если придать системе новую связь, т. е. перевести тело в твердое состояние. Такое движение твердого тела вокруг его центра тяжести называется движением по Пуансо.

Согласно принципу Даламбера, виртуальная работа полной силы для всякого смещения, согласованного со связями системы, равна нулю. В случае жидкого тела существует только одна такая связь, а именно — несжимаемость жидкости. Если мы имеем дело с находящейся в равновесии массой газа, то равновесие *a fortiori* возможно только если эта масса несжимаема.

Пусть δx , δy , δz — проекции виртуального смещения точки с координатами x , y , z ; условие несжимаемости тогда выражается следующим соотношением:

$$\frac{d}{dx} \delta x + \frac{d}{dy} \delta y + \frac{d}{dz} \delta z = 0.$$

Можно различить три вида виртуальных смещений:

- 1) Смещения всей массы, рассматриваемые как смещения твердого тела. Применение к этому случаю принципа Даламбера показывает, что тело должно двигаться по Пуансо вокруг своего центра тяжести, как уже отмечалось выше.
- 2) Смещения, при которых тело испытывает деформации.
- 3) Смещения молекул на постоянных поверхностях равной плотности при движении тела.

Поскольку поверхности равной плотности являются поверхностями эквипотенциальными, можно записать

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} \delta x + \frac{\partial \rho}{\partial y} \delta y + \frac{\partial \rho}{\partial z} \delta z = 0.$$

Так как поверхности равной плотности остаются неизменными, то внешняя форма тела также не изменяется. Таким образом, все сводится к внутренним смещениям, по которым мы и будем рассматривать виртуальную работу.

Представим себе точку M с массой m и координатами x, y, z , движущуюся со скоростью x', y', z' . Ускорение движения — x'', y'', z'' , составляющие силы инерции — mx'', my'', mz'' .

Обозначим составляющие мгновенной угловой скорости относительно осей Ox, Oy, Oz через $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ соответственно.

Согласно известным формулам,

$$\begin{cases} x' = \omega_3 y - \omega_2 z, \\ y' = \omega_1 z - \omega_3 x, \\ z' = \omega_2 x - \omega_1 y. \end{cases}$$

Составляющие ускорения выглядят следующим образом:

$$\begin{cases} x'' = (\omega_3 y' - \omega_2 z') + (\omega_3' y - \omega_2' z), \\ y'' = (\omega_1 z' - \omega_3 x') + (\omega_1' z - \omega_3' x), \\ z'' = (\omega_2 x' - \omega_1 y') + (\omega_2' x - \omega_1' y). \end{cases}$$

Поскольку имеет место относительное равновесие, существует также равновесие между работой сил притяжения и работой силы инерции mx'', my'', mz'' .

Эта сила состоит из двух слагаемых: первое вычисляется исходя из допущения, что движение равномерно, второе же связано с ускоренным вращательным движением.

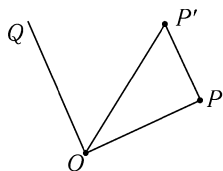


Рис. 5

В некое мгновение t вращение происходит вокруг оси OP , а в мгновение $t + dt$ мгновенной осью вращения становится OP' (рис. 5). Когда dt стремится к нулю, вектор OQ , равный вектору $\frac{PP'}{dt}$, стремится к некоторому предельному положению. Обозначим его проекции на координатные оси через $\omega'_1, \omega'_2, \omega'_3$.

Положим, что ось OP совпадает с осью Oz , тогда

$$\omega'_1 = \omega'_2 = 0.$$

Таким образом, сила инерции, обусловленная угловым ускорением, сводится к виду $(\omega'_3 y, -\omega'_3 x, 0)$.

Применим теперь к рассматриваемым виртуальным смещениям принцип Даламбера.

Работа сил притяжения равна нулю, так как форма тела не изменилась. Положив $\omega^2 = \omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2$, получим выражение для работы центробежной силы: $\frac{\omega^2}{2} dJ$.

Эта работа равна нулю, так как J не изменяется.

Работа силы инерции равна

$$\omega'_3 \sum m(y \delta x - x \delta y).$$

Поскольку тело находится в равновесии, эта работа так же должна быть нулевой. Однако мы всегда можем выбрать такое виртуальное смещение, чтобы сумма

$$\sum m(y \delta x - x \delta y)$$

не была равна нулю — достаточно предположить, что движение происходит вокруг оси Oz . Сумма в этом случае рассчитывается в плоскости xoy , в пределах проекции смещения на эту плоскость.

Значит, нулевым должно быть значение ω'_3 , т. е. вращательное движение должно быть однородным. Что и требовалось доказать [5].

Кроме того, ось вращения должна совпадать с одной из главных осей инерции. Это вытекает из исследований движения твердых тел [6].

Устойчивость равновесия. Теперь рассмотрим условия устойчивости равновесия.

Лежен-Дирихле доказал, что необходимым и достаточным условием устойчивости равновесия является максимальность значения $W + \frac{\omega^2}{2}J$.

Однако нужно делать различие между устойчивостью временной и устойчивостью вековой. Лорд Кельвин, первым сделавший такое различие, назвал вековой устойчивостью такую устойчивость, которая имеет место и с учетом трения, тогда как временная устойчивость существует лишь до тех пор, пока трение не учитывается. Лорд Кельвин доказал, что необходимым и достаточным условием вековой устойчивости относительного равновесия является условие Дирихле [7].

Разумеется, это условие всегда достаточно. Однако предположим, что значение $W + \frac{\omega^2}{2}J$ не максимально. В этом случае, согласно теореме Кельвина, равновесие устойчиво при отсутствии трения. Если трение присутствует, то каким бы малым оно ни было, равновесие будет неустойчивым.

Представляется невозможным непосредственно применить теорему Кельвина к нашему случаю, так как она подразумевает, что всякое движение есть причина трения, что не верно для жидких масс. В самом деле, если тело изолировано в пространстве, оно смещается как единое целое, подобно твердому телу, и трения не возникает.

Эквивалентное твердое тело. Прежде чем двигаться дальше, необходимо определить, что мы будем называть твердым телом, эквивалентным жидкой массе. Эквивалентное твердое тело — это такое твердое тело, молекулы которого занимают в рассматриваемый момент те же положения, что и в жидкой системе.

Скорость центра тяжести такого твердого тела равна скорости центра тяжести жидкой массы.

Разумеется, и главные оси инерции занимают те же положения. Моменты вращения вокруг этих осей также совпадают с соответствующими величинами жидкой массы.

Таким образом, движение массы жидкости оказывается вполне определено в некий момент времени, однако следует заметить, что эквивалентное твердое тело в момент t не совпадает с эквивалентным твердым телом в момент t' .

Теорема. Живая сила жидкой массы равна сумме живой силы эквивалентного ей твердого тела и живой силы жидкой массы при ее перемещении относительно фиксированных осей, связанных с эквивалентным твердым телом.

Обозначим составляющие абсолютной скорости молекулы m относительно трех фиксированных осей через ξ , η , ζ , составляющие скорости соответствующей молекулы эквивалентного твердого тела — через ξ' , η' , ζ' , а составляющие относительной скорости молекулы m по отношению к эквивалентному твердому телу — через ξ'' , η'' , ζ'' . Верно следующее:

$$\xi = \xi' + \xi'', \quad \eta = \eta' + \eta'', \quad \zeta = \zeta' + \zeta''.$$

Соответствующие живые силы равны:

$$\begin{aligned} T &= \sum \frac{m}{2} (\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2), \\ T' &= \sum \frac{m}{2} (\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2), \\ T'' &= \sum \frac{m}{2} (\xi''^2 + \eta''^2 + \zeta''^2). \end{aligned}$$

Требуется доказать, что

$$T = T' + T''.$$

Имеем

$$\begin{aligned} T &= \sum \frac{m}{2} [(\xi' + \xi'')^2 + (\eta' + \eta'')^2 + (\zeta' + \zeta'')^2] = \\ &= T' + T'' + \sum m(\xi'\xi'' + \eta'\eta'' + \zeta'\zeta''). \end{aligned}$$

Теперь докажем, что

$$\sum m(\xi'\xi'' + \eta'\eta'' + \zeta'\zeta'') = 0.$$

Выражение в левой части представляет собой работу системы сил S'' — такой, что сила, действующая на молекулу m , имеет составляющие $m\xi''$, $m\eta''$, $m\zeta''$. Эта система сил отлична от двух других — S и S' , где составляющие сил равны $m\xi$, $m\eta$, $m\zeta$ и $m\xi'$, $m\eta'$, $m\zeta'$. Две последние системы эквивалентны. Общие равнодействующие

сил и результирующие моменты этих двух систем идентичны относительно трех фиксированных осей, которые по определению одинаковы у жидкой массы и эквивалентного ей твердого тела.

В самом деле,

$$\sum m\xi = \sum m\xi',$$

поскольку скорость центра тяжести эквивалентного твердого тела равна скорости центра тяжести жидкой массы.

Верно также следующее равенство:

$$\sum m(y\zeta' - z\eta') = \sum m(y\zeta - z\eta),$$

поскольку моменты вращения вокруг трех координатных осей совпадают у двух систем. Таким образом, $S = S'$, а равнодействующая сил и работа системы S'' равны нулю.

Следовательно,

$$\sum m(\xi'\xi'' + \eta'\eta'' + \zeta'\zeta'') = 0.$$

Условие устойчивости Лежена-Дирихле. Вернемся теперь к жидкой массе.

Имеет место равенство

$$T - W = C^{\text{те}}.$$

Отсюда

$$T' + T'' - W = C^{\text{те}}.$$

Это равенство предполагает, что трение отсутствует, иначе выражение $T' + T'' - W$ будет постоянно уменьшаться.

Положим

$$T' + T'' - W = \varepsilon,$$

тогда при отсутствии трения $\frac{d\varepsilon}{dt} = 0$.

Однако в этом случае относительного движения нет и, следовательно, $T'' = 0$.

Если $T'' > 0$, то $\frac{d\varepsilon}{dt} < 0$.

К такому вращательному движению применима теорема площадей, а его моменты вращения можно считать определенными.

Докажем, что необходимым и достаточным условием устойчивости равновесия является минимальность значения разности $T' - W$.

Возьмем некоторое положение относительного равновесия и запишем

$$T' = T'_0, \quad W = W_0, \quad T'' = 0.$$

Изменим составляющие движения молекул, но таким образом, чтобы моменты вращения не изменились (к этому ограничению мы еще вернемся впоследствии). Жидкая масса в этом случае не отклонится существенно от положения равновесия.

В самом деле, пусть T' и W — значения живой силы и энергии системы, тогда

$$T' - W > T'_0 - W_0.$$

И, *a fortiori*,

$$T' + T'' - W > T'_0 - W_0.$$

Впрочем, значение $T' + T'' - W = \varepsilon$ близко к $T'_0 - W_0$.

Эта величина никак не может увеличиться, следовательно, она всегда останется близкой к $T'_0 - W_0$.

Значения переменных очень мало отличаются от соответствующих значений для T'_0 и W_0 , следовательно, равновесие устойчиво, а условие достаточно.

Кроме того, оно является необходимым. В самом деле, если значение разности $T'_0 - W_0$ не минимально, можно выбрать T' и W таким образом, чтобы

$$T' - W < T'_0 - W_0$$

или даже

$$T' + T'' - W < T'_0 - W_0;$$

значение T'' здесь достаточно мало.

Но $T' + T'' - W$ может только уменьшаться. Величина T'' устремится к нулю, а T' и W не смогут восстановить свои первоначальные значения.

Теперь о вышеупомянутом ограничении. Предположим, что мы отклоняем тело от положения равновесия, не сохраняя при этом значений моментов вращения вокруг главных осей. В этом случае движение твердотельного эквивалента будет таким, что значения его моментов вращения будут несколько отличны от предыдущих значений этих моментов, и мы возвращаемся к началу доказательства.

Вращение вокруг малой оси эллипсоида инерции. Докажем, что равновесие устойчиво, только если вращение происходит вокруг наименьшей оси эллипсоида инерции, связанного с жидкой массой [8].

Пусть $Oxyz$ (рис. 6) — некоторая фиксированная система координат, OA , OB , OC — главные оси инерции, ω — мгновенная скорость вращения, ω_1 , ω_2 , ω_3 — проекции скорости на фиксированные оси, а p , q , r — проекции скорости на оси OA , OB , OC . Имеет место следующее равенство:

$$\omega^2 = \omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2 = p^2 + q^2 + r^2.$$

Пусть OR — мгновенная ось вращения, а J — момент инерции относительно этой оси.

Тогда

$$T' = \frac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2) = \frac{\omega^2}{2}J.$$

Пусть μ_1 , μ_2 , μ_3 — моменты вращения относительно координатных осей. Отрезок OM , проекциями которого являются (μ_1, μ_2, μ_3) , зафиксирован в пространстве (теорема площадей), и верно следующее:

$$\mu^2 = \mu_1^2 + \mu_2^2 + \mu_3^2 = C^{te}.$$

Проекциями отрезка OM на систему осей $OABC$ являются Ap , Bq , Cr , значит,

$$\mu^2 = A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2.$$

Как нам уже известно, условие устойчивости заключается в минимальности значения разности $T' - W$. Но если изменить ориентацию вращения, не изменяя формы тела, W не изменится. Следовательно, необходимо, чтобы минимальным было значение T' . Напомним, что отрезок OM зафиксирован в пространстве.

Положим

$$p\sqrt{A} = X,$$

$$q\sqrt{B} = Y,$$

$$r\sqrt{C} = Z.$$

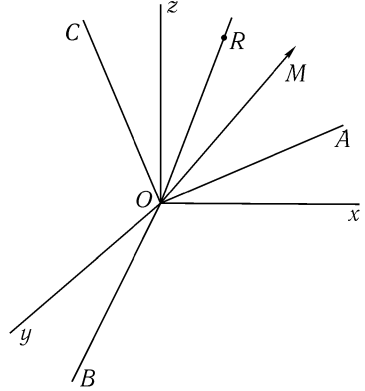


Рис. 6

Тогда

$$\begin{aligned} T' &= \frac{1}{2}(X^2 + Y^2 + Z^2), \\ \mu^2 &= (AX^2 + BY^2 + CZ^2) = C^{\text{те}}. \end{aligned}$$

Таким образом, точка с координатами (X, Y, Z) должна лежать на поверхности данного эллипсоида и в то же время на поверхности сферы минимального радиуса. Следовательно, мгновенная ось вращения есть наименьшая ось данного эллипсоида, т. е. эллипсоида инерции.

Если A — наибольшая из величин A, B, C , осью вращения будет ось x . Тогда $p = \omega$, $q = 0$, $r = 0$.

$$A = J, \quad T' = \frac{\mu^2}{2J}.$$

Следовательно, необходимо, чтобы выражение

$$W - T' = W - \frac{\mu^2}{2J} \tag{1}$$

было максимальным, т. е. должно соблюдаться равенство

$$\delta\left(W - \frac{\mu^2}{2J}\right) = 0.$$

Достаточно, чтобы

$$\left(W + \frac{\omega^2}{2}J\right) \tag{2}$$

было максимальным (стр. 17), но данное условие не является необходимым.

Отсюда

$$\delta\left(W + \frac{\omega^2}{2}J\right) = 0.$$

Итак, у нас есть следующие условия:

$$\delta W + \frac{\mu^2}{2J^2} \delta J = 0,$$

$$\delta W + \frac{\omega^2}{2} \delta J = 0.$$

Таким образом, можно ожидать, что если выполняется условие (2), то и первое условие (1) также выполняется.

Допустим, однако, что это не так, т.е., что возможна следующая система уравнений:

$$\begin{cases} W + \frac{\omega^2}{2}J < W_0 + \frac{\omega^2}{2}J_0, \\ W - \frac{\mu^2}{2J} > W_0 - \frac{\mu^2}{2J_0}. \end{cases}$$

Так как $\mu = \omega J_0$, получим

$$W_0 - \frac{\omega^2 J_0}{2} < W - \frac{\omega^2}{2} \frac{J_0^2}{J}.$$

Складывая неравенства, получим

$$\frac{\omega^2}{2}(J - J_0)J < \frac{\omega^2}{2}(JJ_0 - J_0^2),$$

откуда

$$J^2 - 2JJ_0 + J_0^2 < 0, \quad (J - J_0)^2 < 0,$$

что есть абсурд. Следовательно, допущенное утверждение неверно и выполнение второго условия влечет за собой выполнение первого [9].

ГЛАВА 3

СФЕРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

Выражение ΔV в прямоугольных координатах. Пусть три семейства поверхностей

$$\xi(x, y, z) = \alpha, \quad \eta(x, y, z) = \beta, \quad \zeta(x, y, z) = \gamma$$

образуют прямоугольную систему координат.

Рассмотрим бесконечно малый прямоугольный параллелепипед, грани которого составлены из шести следующих поверхностей:

$$\begin{aligned} \xi &= \xi_0, & \xi &= \xi_0 + \delta\xi, \\ \eta &= \eta_0, & \eta &= \eta_0 + \delta\eta, \\ \zeta &= \zeta_0, & \zeta &= \zeta_0 + \delta\zeta. \end{aligned}$$

Ребра данного параллелепипеда составят отрезки

$$a \, d\xi, \quad b \, d\eta, \quad c \, d\zeta.$$

Диагональ¹ равна

$$ds^2 = a^2 \, d\xi^2 + b^2 \, d\eta^2 + c^2 \, d\zeta^2.$$

Введем функцию $V(\xi, \eta, \zeta)$ и попытаемся определить значение интеграла

$$\int \Delta V \, d\tau,$$

взятого по объему параллелепипеда. Он равен интегралу

$$\int \frac{\partial V}{\partial n} \, d\sigma,$$

взятому по поверхности параллелепипеда.

¹Точнее, квадрат диагонали.

Так как объем бесконечно мал, первый интеграл можно записать в виде

$$\Delta V \, abc \, d\xi \, d\eta \, d\zeta.$$

Второй интеграл является суммой трех интегралов, каждый из которых взят по двум противоположным граням объема.

Для грани $\xi = \xi_0$,

$$-\frac{\partial V}{a \partial \xi} bc \, d\eta \, d\zeta.$$

Для противоположной грани $\xi = \xi_0$,

$$\left[\frac{bc}{a} \frac{\partial V}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{bc}{a} \frac{\partial V}{\partial \xi} \right) d\xi \right] d\eta \, d\zeta,$$

и, следовательно, для совокупности двух граней получим выражение

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{bc}{a} \frac{\partial V}{\partial \xi} \right) d\eta \, d\zeta \, d\xi.$$

Таким образом,

$$\Delta V \, abc \, d\xi \, d\eta \, d\zeta = d\xi \, d\eta \, d\zeta \left[\frac{\partial}{\partial \xi} \frac{bc}{a} \frac{\partial V}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{ca}{b} \frac{\partial V}{\partial \eta} + \frac{\partial}{\partial \zeta} \frac{ab}{c} \frac{\partial V}{\partial \zeta} \right]$$

и, наконец,

$$\Delta V = \frac{1}{abc} \sum \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{bc}{a} \frac{\partial V}{\partial \xi} \right).$$

То же в полярных координатах. Запишем для данной системы

$$x = r \sin \theta \cos \varphi, \quad y = r \sin \theta \sin \varphi, \quad z = r \cos \theta.$$

Положив $\cos \theta = \mu$, получим

$$x = r \sqrt{1 - \mu^2} \cos \varphi, \quad y = r \sqrt{1 - \mu^2} \sin \varphi, \quad z = r \mu.$$

Линейный элемент¹ этой системы координат определяется следующим выражением:

$$\begin{aligned} ds^2 &= dx^2 + dy^2 + dz^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 = \\ &= dr^2 + r^2 \frac{d\mu^2}{1 - \mu^2} + r^2 (1 - \mu^2) d\varphi^2. \end{aligned}$$

¹Опять же, квадрат линейного элемента.

Вместо ξ, η, ζ у нас есть r, μ, φ . Для данной системы можно записать

$$a = 1, \quad b = \frac{r}{\sqrt{1 - \mu^2}}, \quad c = r\sqrt{1 - \mu^2}, \quad abc = r^2.$$

Теперь легко находим

$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \mu} \left[(1 - \mu^2) \frac{\partial V}{\partial \mu} \right] + \frac{1}{r^2 (1 - \mu^2)} \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2}.$$

Сферические полиномы. Сферические функции. *Сферическим полиномом* называется однородный полином от x, y, z , удовлетворяющий уравнению Лапласа $\Delta P = 0$.

Если этот полином от x, y, z имеет степень n , то он содержит $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ произвольных коэффициентов. Однако ввиду того, что $\Delta P_n = 0$, количество соотношений между этими коэффициентами ограничено, а так как это выражение имеет степень $n - 2$, то существует $n \frac{(n-1)}{2}$ соотношений между его коэффициентами.

Таким образом, остается

$$\frac{(n+1)(n+2)}{2} - \frac{n(n-1)}{2} = 2n + 1$$

сферических полиномов, независимых от степени n .

Выразив x, y, z в полярных координатах, получим

$$P_n = r^n Y_n,$$

где Y_n есть функция от φ и μ , которую мы назовем сферической функцией порядка n .

Очевидно имеет место соотношение

$$r \frac{\partial P_n}{\partial r} = n P_n. \quad (1)$$

Рассмотрим теперь равенство (2), приведенное на стр. 11,

$$\int_S \left(U \frac{\partial V}{\partial n} - V \frac{\partial U}{\partial n} \right) d\sigma = \int_T (U \Delta V - V \Delta U) d\tau.$$

Предположим, что поверхность S представляет собой сферу единичного радиуса, а U и V являются сферическими полиномами порядка m и n . Тогда второй член будет равен нулю, и равенство запишется следующим образом:

$$\int \left[P_m \frac{\partial P_n}{\partial r} - P_n \frac{\partial P_m}{\partial r} \right] d\sigma = 0.$$

Откуда, учитывая равенство (1), получим

$$(m - n) \int_S P_m P_n d\sigma = 0.$$

Если m не равно n ,

$$\int_S P_m P_n d\sigma = 0,$$

где интеграл берется по поверхности сферы единичного радиуса. Это же можно записать иначе:

$$\int_{-1}^{+1} \int_0^{2\pi} Y_m Y_n d\varphi d\mu = 0.$$

Если $m = n$, то данный результат не верен.

Фундаментальные сферические функции. Очевидно, что верно следующее:

$$x = r\sqrt{1 - \mu^2} \cos \varphi = r\sqrt{1 - \mu^2} \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2},$$

$$y = r\sqrt{1 - \mu^2} \sin \varphi = r\sqrt{1 - \mu^2} \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}.$$

Заменив x и y в выражении для P_n их значениями, получим

$$P_n = \sum_{p=-n}^{p=n} r^n e^{ip\varphi} X_n^p,$$

где X_n^p зависит только от μ . Иначе, это полином от μ и от $\sqrt{1 - \mu^2}$. Полиномы с четным p содержат $\sqrt{1 - \mu^2}$ только в четной степени, а полиномы с нечетным p содержат $\sqrt{1 - \mu^2}$ только в нечетной степени.

Таким образом, первые являются полиномами от μ , а вторые — полиномами от μ , помноженного на $\sqrt{1-\mu^2}$.

Подставим значение P в уравнение $\Delta P_n = 0$.

Получим

$$\sum \left[n(n+1)r^{n-2}e^{ip\varphi}X_n^p + r^{n-2}e^{ip\varphi} \frac{d}{d\mu} \left[(1-\mu^2) \frac{dX_n^p}{d\mu} \right] - \frac{X_n^p p^2 r^{n-2} e^{ip\varphi}}{1-\mu^2} \right] = 0.$$

Обратив в нуль коэффициент при $r^{n-2}e^{ip\varphi}$, получим уравнение, которому должен удовлетворять X_n^p . Это уравнение имеет вид

$$\frac{d}{d\mu} \left[(1-\mu^2) \frac{dX_n^p}{d\mu} \right] - \frac{n(n+1)(\mu^2-1) + p^2}{1-\mu^2} X_n^p = 0.$$

Общее решение этого уравнения есть трансцендентная функция, однако имеется одно частное решение, представляющее собой один из двух видов полиномов, подразумеваемых определением X_n^p , и определенное с точностью до некоторого постоянного множителя.

Очевидно, что X_n^p и X_n^{-p} удовлетворяют одному и тому же уравнению. Следовательно, можно записать

$$X_n^p = A X_n^{-p},$$

где A — некоторая константа. Таким образом, существует последовательность из $2n+1$ искомых сферических функций.

$$\begin{array}{ccccccc} X_n^0, & X_n^1 e^{i\varphi}, & X_n^2 e^{2i\varphi}, & \dots, & X_n^n e^{ni\varphi}, & \dots, \\ & X_n^1 e^{-i\varphi}, & X_n^2 e^{-2i\varphi}, & \dots, & X_n^n e^{-ni\varphi}, & \dots, \end{array}$$

Можно записать $2n+1$ этих независимых функций иначе:

$$\begin{array}{ccccccc} X_n^0, & X_n^1 \cos \varphi, & X_n^2 \cos 2\varphi, & \dots, & X_n^n \cos n\varphi, & \dots, \\ & X_n^1 \sin \varphi, & X_n^2 \sin 2\varphi, & \dots, & X_n^n \sin n\varphi, & \dots, \end{array}$$

Таким образом, две сферические функции различаются либо значением n , либо p , либо, если $n = p$, тем, что одна из них содержит синус $p\varphi$, а другая — косинус $p\varphi$.

Ранее было доказано, что

$$\int_{-1}^{+1} d\mu \int_0^{2\pi} Y_m Y_n d\varphi = 0,$$

если $m \neq n$. Теперь завершим доказательство, показав, что интеграл

$$\int_{-1}^{+1} d\mu \int_0^{2\pi} Y Y' d\varphi = 0,$$

если Y и Y' — две разные функции.

Достаточно произвести доказательство для случая двух функций одного порядка.

Следовательно, можно записать интеграл

$$\int_{-1}^{+1} X_n^p X_n^q d\mu \int_0^{2\pi} \cos p\varphi \cos q\varphi d\varphi,$$

или же

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^{+1} X_n^p X_n^q d\mu \int_0^{2\pi} \sin p\varphi \sin q\varphi d\varphi, \\ & \int_{-1}^{+1} X_n^{p^2} d\mu \int_0^{2\pi} \sin p\varphi \cos p\varphi d\varphi. \end{aligned}$$

Второй из трех интегралов равен нулю.

Наконец, очевидно, что интеграл

$$\int_{-1}^{+1} d\mu \int_0^{2\pi} Y^2 d\varphi$$

отличен от нуля.

Определение полиномов X_n^p . Найдем полином X_n^p , для чего рассмотрим сначала случай, когда $p = 0$.

Запишем уравнение

$$\frac{d}{d\mu} \left[(1 - \mu^2) \frac{dX}{d\mu} \right] + n(n+1)X = 0.$$

Это уравнение определяет полиномы Лежандра. Имеет место равенство

$$X_n^0 = \frac{d^n}{d\mu^n} (1 - \mu^2)^n.$$

Таким образом, $X_n^0(\cos \theta)$ есть сферическая функция, где θ представляет собой угол между некоторым направлением и осью Oz .

Благодаря симметрии, функция $X_n^0(\cos \varepsilon)$, где ε представляет собой угол между данным направлением и каким-либо другим фиксированным направлением, также будет сферической. Заметим, что при любых θ и θ' выполняется равенство

$$\cos \varepsilon = \cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos(\varphi - \varphi').$$

Отсюда, функция

$$X_n^0 \left[\cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos(\varphi - \varphi') \right]$$

также будет сферической.

Положим

$$\sin \theta' e^{-i\varphi'} = 2\xi, \quad \sin \theta' e^{i\varphi'} = 2\eta.$$

Отсюда, помножив оба равенства на $e^{i\varphi}$ и $e^{-i\varphi}$ соответственно и сложив их, получим

$$\sin \theta' \cos(\varphi - \varphi') = \xi e^{i\varphi} + \eta e^{-i\varphi}.$$

Перемножив равенства друг на друга, получим

$$\sin^2 \theta' = 4\xi\eta,$$

откуда

$$\cos^2 \theta' = 1 - 4\xi\eta.$$

Следовательно, функция

$$X_n^0 \left[\sqrt{1 - 4\xi\eta} \mu - \sqrt{1 - \mu^2} (\xi e^{i\varphi} + \eta e^{-i\varphi}) \right]$$

есть еще одна сферическая функция при любых ξ и η .

В частности, если принять

$$\xi = 1, \quad \eta = 0,$$

то функция

$$X_n \left[\mu + \sqrt{1 - \mu^2} e^{i\varphi} \right]$$

будет сферической.

Разложив ее по формуле Тэйлора, получим следующий полином:

$$X_n \left[\mu + \sqrt{1 - \mu^2} e^{i\varphi} \right] = X_n(\mu) + e^{i\varphi} \sqrt{1 - \mu^2} \frac{dX_n}{d\mu} + \dots + \\ + \frac{e^{ip\varphi} (1 - \mu^2)^{\frac{p}{2}}}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot p} \frac{d^p X_n}{d\mu^p} + \dots + \frac{e^{in\varphi} (1 - \mu^2)^{\frac{n}{2}}}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n} \frac{d^n X_n}{d\mu^n}.$$

Каждый член этой суммы представляет собой сферическую функцию.

Таким образом, функции X_n^p определены с точностью до некоторого множителя.

$$X_n^p = (1 - \mu^2)^{\frac{p}{2}} \frac{d^p X_n^0(\mu)}{d\mu^p} = (1 - \mu^2)^{\frac{p}{2}} \frac{d^{n+p} (1 - \mu^2)^n}{d\mu^{n+p}}.$$

Свойства сферических функций. Пусть U — функция от r , а P_n — сферический полином.

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Вычислим значение $\Delta(UP_n)$

$$\Delta(UP_n) = P_n \Delta U + 2 \sum \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial P_n}{\partial x} + U \Delta P_n;$$

но

$$\Delta P_n = 0; \quad \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{dU}{dr} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{dU}{dr} \cdot \frac{x}{r}, \\ \Delta(UP_n) = P_n \left[\frac{d^2 U}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dU}{dr} \right] + \frac{2}{r} \frac{dU}{dr} \left(x \frac{\partial P_n}{\partial x} + y \frac{\partial P_n}{\partial y} + z \frac{\partial P_n}{\partial z} \right)$$

и, поскольку P_n есть функция однородная,

$$\Delta(UP_n) = P_n \left(\frac{d^2 U}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dU}{dr} \right) + \frac{2n}{r} P_n \frac{dU}{dr} = P_n \left[\frac{d^2 U}{dr^2} + \frac{2(n+1)}{r} \frac{dU}{dr} \right].$$

Теперь вычислим значение $\Delta(UY_n)$, которое равно

$$\Delta \left[\frac{U}{r^n} \times P_n \right],$$

так как $P_n = r^n Y_n$. Находим

$$\Delta(UY_n) = Y_n \left[\frac{1}{r^n} \frac{d^2 U}{dr^2} + \frac{2}{r^{n+1}} \frac{dU}{dr} - \frac{n(n+1)U}{r^{n+2}} \right],$$

$$\Delta(UY_n) = Y_n \left[\frac{d^2 U}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dU}{dr} - \frac{n(n+1)U}{r^2} \right].$$

Сфероидальный слой. Применим вышеизложенные рассуждения к изучению сфероидальной массы жидкости, т. е. массы жидкости, фигура равновесия которой мало отличается от сферы, или, точнее, массы жидкости, поверхность которой заключена между двумя сферами близких радиусов. Сфероидальным слоем назовем слой, заключенный между двумя сфероидальными поверхностями.

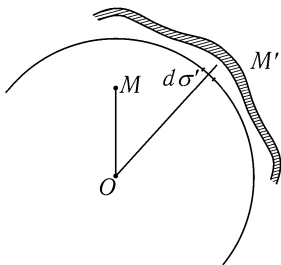


Рис. 7

товы координаты равны (x, y, z) , а сферические —

$$r, \quad \mu = \cos \theta, \quad \varphi.$$

Возьмем также точку M' , чьи координаты соответственно равны (x', y', z') и $(r' = 1, \mu' = \cos \theta', \varphi')$.

Расстояние MM' равно $1 + r^2 - 2r \cos(OM, OM')$.¹

$$\cos \gamma = \cos(OM, OM') = \cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos(\varphi - \varphi').$$

Разложение $\frac{1}{MM'}$ в ряд. Потенциал, создаваемый сфероидальным слоем в точке M , равен

$$V = \int \frac{\varepsilon' d\sigma'}{MM'},$$

где ε' — функция от μ и φ , $r < 1$.

¹Речь идет, конечно же, о квадрате расстояния.

Но

$$MM'^2 = 1 - 2r \cos \gamma + r^2 = (1 - re^{i\gamma})(1 - re^{-i\gamma}),$$

$$\frac{1}{MM'} = (1 - re^{i\gamma})^{-\frac{1}{2}} (1 - re^{-i\gamma})^{-\frac{1}{2}}.$$

Известно, что

$$(1 - re^{i\gamma})^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}re^{i\gamma} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}r^2e^{2i\gamma} + \dots + \\ + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2n}r^ne^{ni\gamma} + \dots$$

Это выражение представляет собой абсолютно сходящийся ряд для $r < 1$.

Также

$$(1 - re^{-i\gamma})^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}re^{-i\gamma} + \dots + \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2n}r^ne^{-ni\gamma} + \dots$$

Произведение этих двух рядов также дает сходящийся ряд, если $r < 1$; коэффициент при члене r^n равен

$$A_n = \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2n} \cdot e^{ni\gamma} + \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-3)}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (2n-2)} \cdot \frac{1}{2}e^{(n-2)i\gamma} + \\ + \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-5)}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (2n-4)} \cdot \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}e^{(n-4)i\gamma} + \dots + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2n} \cdot e^{-ni\gamma}.$$

Коэффициент при члене $e^{pi\gamma}$ равен коэффициенту при $e^{-pi\gamma}$.

Таким образом, имеем полином с вещественными коэффициентами при косинусе угла γ и кратных ему углов вплоть до n . Так как все коэффициенты данного полинома положительны, он достигает своего максимального значения при $\gamma = 0$. Но в этом случае

$$\frac{1}{MM'} = \frac{1}{1-r} = 1 + r + \dots + r^n + \dots$$

Следовательно, коэффициенты разложения меньше или равны единице.

Можно записать

$$\frac{1}{MM'} = \sum A_n r^n,$$

где A_n есть функция от μ , φ , μ' и φ' .

Разложение в ряд потенциала сфероидального слоя. Потенциал V равен

$$\sum r^n \int A_n \varepsilon' d\sigma.$$

Любой член разложения V меньше, чем

$$r^n \int \varepsilon' d\sigma.$$

Допустимая погрешность разложения V при вычислении суммы первых n его членов меньше, чем

$$\frac{r^{n+1}}{1-r} \int \varepsilon' d\sigma.$$

Следовательно, ряд сходится, если $r < 1$.

Функция $\frac{1}{MM'}$ может быть разложена в ряд по возрастающим степеням переменных x, y, z :

$$\frac{1}{MM'} = \frac{1}{\sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2}} = \sum x^m y^p z^q \int A_{mpq} \varepsilon' d\sigma',$$

а вернувшись к полярным координатам, получим разложение по степеням r^n .

Если в разложении функции V обозначить совокупность членов степени n через V_n , можно записать

$$V = V_0 + V_1 + \dots + V_n + \dots$$

Но функция V удовлетворяет уравнению Лапласа, и значит

$$\Delta V_0 + \Delta V_1 + \dots + \Delta V_n + \dots = 0.$$

Чтобы данное равенство выполнялось, необходимо, чтобы все полиномы V_n были сферическими. Если заменить x, y, z в V_n сферическими координатами r, μ и φ , получим функцию вида $r^n Y_n$, где Y_n — сферическая функция. Отсюда

$$V = \sum r^n Y_n.$$

Эта формула применима и к случаю $r < 1$.

Предположим, что $r > 1$, и вообразим точку M_1 , являющуюся образом точки M , так что $OM_1 \times OM = 1$ (рис. 8); обозначим $OM = r$, $OM_1 = \frac{1}{r}$. Если точка M' расположена на поверхности сферы, то

$$\frac{MM'}{M'M_1} = \frac{OM}{OM'} = \frac{OM'}{OM_1} = \frac{\sqrt{OM \times OM'}}{\sqrt{OM' \times OM_1}} = \sqrt{\frac{OM}{OM_1}} = r.$$

Потенциал в точке M_1 равен

$$V_1 = \int \frac{\varepsilon' d\sigma}{M_1 M'} = r \int \frac{\varepsilon' d\sigma}{MM'}.$$

Отсюда

$$V = \frac{V_1}{r}.$$

Однако потенциал в точке M_1 , расположенной на расстоянии $\frac{1}{r}$ от центра сферы, можно записать иначе:

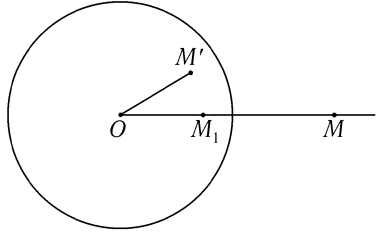


Рис. 8

$$V_1 = \sum \frac{Y_n}{r^n}.$$

Следовательно, потенциал в точке M равен

$$\sum \frac{Y_n}{r^{n+1}}.$$

Предположим, что точки M и M_1 приближаются к поверхности сферы, сохраняя соотношение $OM_1 \times OM = 1$. Значения потенциала в точках M и M_1 приближаются друг к другу, а значения производных потенциала различны внутри и снаружи поверхности, и имеет место равенство

$$\frac{\partial V}{\partial r} - \frac{\partial V_1}{\partial r_1} = 4\pi\varepsilon;$$

но

$$V_1 = Vr, \quad \frac{\partial V_1}{\partial r_1} = \left[r \frac{\partial V}{\partial r} + V \right] \frac{dr}{dr_1} = -Vr^2 - \frac{\partial V}{\partial r} r^3.$$

Таким образом, когда r стремится к 1,

$$\lim \left[\frac{\partial V}{\partial r} + r^3 \frac{\partial V}{\partial r} + Vr^2 \right] = 4\pi\varepsilon.$$

Так как $\frac{\partial V}{\partial r}$ конечна, при тех же условиях верны равенства:

$$\lim \frac{\partial V}{\partial r}(r-1) = 0, \quad \lim \frac{\partial V}{\partial r}(r-r^3) = 0;$$

и, наконец,

$$\lim V(1-r^2) = 0.$$

Складывая четыре последних равенства, получим

$$\lim \left[2r \frac{\partial V}{\partial r} + V \right] = 4\pi\varepsilon.$$

Положим

$$\Phi = 2r \frac{\partial V}{\partial r} + V.$$

Если $r < 1$, Φ можно представить как ряд вида

$$\Phi = \sum (2n+1)r^n Y_n;$$

следовательно, функция Φ удовлетворяет уравнению Лапласа, поскольку она является суммой сферических полиномов.

Когда r стремится к 1, Φ стремится к $4\pi\varepsilon$. Доказав, что данное разложение действительно также для $r = 1$, мы придем к теореме Лапласа:

Теорема. *Любую функцию двух переменных можно представить в виде суммы сферических функций.*

Потенциал в некоторой точке сфероидального слоя. На поверхности сферы единичного радиуса зададим функцию ε , которая определяет потенциал V внутри сферы. Потенциал на поверхности сферы равен $4\pi\varepsilon$.

Этот потенциал раскладывается в степенной ряд

$$\sum A_n r^n, \tag{1}$$

который сходится, если $r < 1$. Если рассматривать r как комплексную переменную, $r = \rho e^{i\varphi}$, данный ряд определяет функцию Φ , сходящуюся внутри окружности единичного радиуса.

Положим $r = e^{i\varphi}$. Тогда существует функция Φ' , определенная на окружности единичного радиуса, кроме, быть может, некоторого количества сингулярных точек. Если ряд (1) сходится для $\rho = 1$, то, согласно теореме Абеля, он представляет собой функцию Φ' .

Я утверждаю, что это верно в том случае, если функция Φ' разложима в ряд Фурье.

Тогда

$$\Phi' = \sum A'_n e^{ni\varphi} + B'_n e^{-ni\varphi}.$$

Я также утверждаю, что верно следующее:

$$A'_n = A_n, \quad B'_n = 0.$$

Действительно, согласно теореме Коши, последовательность значений функции Φ' внутри окружности единичного радиуса определяет функцию, которая есть не что иное, как функция $V(\rho e^{i\varphi})$.

Эта функция разложима в ряд вида (1); с другой стороны, имеют место следующие равенства:

$$A_n = \frac{1}{2i\pi} \int \frac{\Phi' d\varphi}{r^{n+1}}, \quad \frac{1}{2i\pi} \int \Phi' r^{n-1} d\varphi = 0,$$

где интегралы берутся вдоль окружности единичного радиуса.

Но первый интеграл сводится к A'_n , а второй — к B'_n . Следовательно,

$$A'_n = A_n, \quad B'_n = 0.$$

Значит, если функция Φ' разложима в ряд Фурье, то ряд будет сходиться для всех $r = e^{i\varphi}$, в частности, для $r = 1$.

Нам остается лишь доказать, что функция Φ' разложима в ряд Фурье, т. е. что Φ' — это функция от φ , имеющая производную во всей области определения, за исключением нескольких сингулярных точек, и что в этих сингулярных точках интеграл $\int |\Phi'| d\varphi$ имеет смысл.

Докажем, что функцию ε можно представить в виде суммы сферических функций. Потенциал в точке M с координатами (r, θ, φ) равен

$$V = \int \frac{\varepsilon' d\sigma'}{MM'},$$

где ε' — плотность сферического слоя в точке (θ', φ') .

Имеет место равенство:

$$\frac{\partial V}{\partial r} = - \int \frac{\varepsilon' d\sigma'}{MM'^2} \frac{dMM'}{dr} = \int \frac{\varepsilon'(\cos \gamma - r) d\sigma'}{MM'^3}.$$

Как уже было доказано,

$$\varepsilon = \Phi(\theta, \varphi) = V + 2r \frac{\partial V}{\partial r} = \int \frac{\varepsilon'(1 - r^2) d\sigma'}{MM'^3}.$$

Допустим, что луч OM зафиксирован в пространстве, и примем его за ось Oz :

$$\begin{aligned} \theta &= 0, \quad \mu = 1, \\ MM'^2 &= 1 - 2r \cos \gamma + r^2 = 1 - 2\mu'r + r^2. \end{aligned}$$

Элемент поверхности $d\sigma' = d\mu' d\varphi'$, а значение функции Φ в точке M запишется следующим образом:

$$\Phi_M = (1 - r^2) \int_{-1}^{+1} \frac{d\mu'}{(1 - 2r\mu' + r^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi} \varepsilon' d\varphi',$$

так как ε' зависит только от φ' . Положим

$$F(\mu') = \int_0^{2\pi} \varepsilon' d\varphi'.$$

Тогда

$$\Phi = (1 - r^2) \int_{-1}^{+1} \frac{F(\mu') d\mu'}{(1 - 2r\mu' + r^2)^{3/2}}.$$

Предположим, что сфера разделена на некоторое конечное количество сферических многоугольников, стороны которых представляют собой дуги аналитических кривых, и что в каждом из этих многоугольников функция ε' является непрерывной функцией от μ' и φ' .

При таких условиях $F(\mu')$ есть аналитическая функция от μ' , за исключением тех значений μ' , которые соответствуют вершинам многоугольников или параллелям на сфере, касательным к сторонам многоугольников. Тогда функция $\frac{F(\mu')}{MM'^3}$ интегрируема на интервале от -1 до $+1$.

Положив $r = e^{i\psi}$, получим

$$MM'^2 = 2r \left[\frac{1}{2} \left(r + \frac{1}{r} \right) - \mu' \right] = 2r(\cos \psi - \mu'),$$

а положив затем

$$\cos \psi - \mu' = Z^2,$$

получим

$$\Phi = \frac{1 - r^2}{(2r)^{3/2}} \int_{-1}^{+1} \frac{F(\mu') d\mu'}{Z^3}.$$

Далее мы докажем, что функция Φ от ψ имеет производную и, следовательно, разложима в ряд Фурье.

И наконец, если разложить ее по степеням r , то получится сходящийся ряд для $|r| < 1$. В том случае, когда ε содержит конечное число членов, данный ряд будет сходящимся и для $|r| = 1$.

Рассмотрим несколько примеров, которые мы используем в дальнейшем.

Если $\varepsilon' = \frac{1}{2\pi}$, то

$$F(\mu') = \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{2\pi} = 1,$$

а если $\varepsilon' = \frac{1}{\pi}$, то

$$F(\mu') = 2.$$

Соответствующими сферическими функциями могут быть $Y_0 = \frac{1}{2\pi}$ или $Y_0 = \frac{1}{\pi}$.

Также, если $\varepsilon' = \frac{\mu'}{2\pi}$, то, применив формулу со стр. 54, получим

$$4\pi\varepsilon' = Y_0 + 3Y_1 + 5Y_2 + \dots$$

В нашем случае

$$Y_0 = Y_2 = \dots = 0, \quad Y_1 = \frac{2}{3}\mu$$

и

$$\Phi_0 = 2r = 2e^{i\psi}.$$

Теорема Лапласа. В любом случае верно следующее:

$$F(\mu') = a + b\mu' + F_1(\mu'),$$

где a и b — некоторые постоянные. Функция Φ в этом случае запишется так:

$$2a + 2be^{i\psi} + \Phi_1.$$

Положив

$$\eta(\psi) = \frac{1 - r^2}{2r^{3/2}} = \frac{-i \sin \psi}{\sqrt{r}} e^{-i\frac{\psi}{2}},$$

получим

$$\Phi_1 = \eta(\psi) \int_{-1}^{+1} \frac{F_1(\mu') d\mu'}{Z^3}.$$

Учитывая вышеизложенное, для того чтобы убедиться, что функция Φ разложима в ряд Фурье, следует доказать, что

- 1) производная $\frac{d\Phi}{d\psi}$ существует и конечна на всей области определения за исключением ограниченного числа сингулярных точек функции Φ ;
- 2) интеграл $\int |\Phi| d\psi$ в этих сингулярных точках конечен.

Но $Z = 0$ при $\mu' = \cos \psi$, а значит, $F(\mu')$ не имеет смысла. Необходимо выяснить, к какому пределу стремится функция, когда μ стремится к $\cos \psi$.

Производная $\frac{d\Phi}{d\psi}$ существует. В самом деле,

$$\frac{d\Phi}{d\psi} = 2bie^{i\psi} + \frac{d\eta}{d\psi} \int_{-1}^{+1} \frac{F_1 d\mu'}{Z^3} + \frac{3}{2}\eta \sin \psi \int_{-1}^{+1} \frac{F_1 d\mu'}{Z^3}.$$

Можно подобрать a и b таким образом, чтобы

$$F_1(\cos \psi) = 0, \quad F_1'(\cos \psi) = 0.$$

Следовательно, если $\cos \psi - \mu'$ есть бесконечно малая величина первого порядка, то значение функции $F(\mu')$, аналитической в окрестности $\cos \psi$, будет бесконечно малой величиной второго порядка. Знаменатели под знаком интеграла — величины порядка $\frac{3}{2}$ и $\frac{5}{2}$, а числитель —

величина второго порядка. Интеграл, таким образом, конечен за исключением случая, когда $\cos \psi$ — точка сингулярности для функции $F(\mu')$. В этих сингулярных точках ($\psi = \psi_0$) интеграл

$$\int |\Phi| d\psi$$

должен быть конечным.

Предположим, что

$$a = F(\cos \psi_0), \quad b = 0.$$

Тогда

$$\int |\Phi| d\psi < 2 \int |F(\cos \psi)| d\psi + \int \eta d\psi \int \frac{|F(\mu') - F(\cos \psi)|}{Z^3} d\mu.$$

Правая часть данного неравенства должна оставаться конечной. Первый интеграл конечен. Следует доказать, что это так и для второго интеграла.

Этот интеграл представляет собой двойной интеграл, и его значение в сингулярных точках должно быть бесконечно малой величиной порядка ниже двух, а в сингулярных линиях — порядка ниже единицы.

В нашем случае имеется одна сингулярная линия, а именно, линия $\mu' = \cos \psi$. В точке $\mu' = \cos \psi_0$ числитель должен быть бесконечно малой величиной первого порядка, а знаменатель — величиной порядка $\frac{3}{2}$, за исключением сингулярных точек функции $F(\mu')$. Следовательно, элемент интеграла должен быть бесконечной величиной порядка $\frac{1}{2}$, и интеграл имеет смысл.

В сингулярных точках $F(\mu') \neq F(\cos \psi)$ значение функции имеет порядок $\frac{3}{2}$, и интеграл снова имеет смысл.

Таким образом, функция Φ удовлетворяет необходимым условиям и разложима в ряд Фурье.

Формула Лапласа действительна для случая $r = 1$, и имеет место следующее равенство:

$$\varepsilon = \frac{1}{4\pi} \sum (2n+1) Y_n.$$

Теорема Лапласа доказана.

ГЛАВА 4

НЕОДНОРОДНАЯ МАССА ЖИДКОСТИ. ПРОБЛЕМА КЛЕРО

Предварительные рассуждения. Предположим, что вращение жидкой массы происходит очень медленно: ее поверхность мало отличается от поверхности сферы, а квадрат скорости вращения ω^2 представляет собой бесконечно малую величину первого порядка.

Ранее было показано, что при отсутствии вращательного движения эквипотенциальные поверхности есть поверхности равной плотности. Потенциал V_0 в какой-либо точке зависит только от r , и уравнение Лапласа сводится к следующему виду:

$$\Delta V_0 = \frac{d^2 V_0}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dV_0}{dr} = -4\pi\rho. \quad (1)$$

Масса, заключенная между двумя сферами бесконечно близких радиусов r и $r + dr$, равна

$$4\pi r^2 \rho \, dr,$$

в то время как общая масса, заключенная внутри сферы радиуса r , равна

$$\int_0^r 4\pi r^2 \rho \, dr.$$

Обозначим среднюю плотность данной сферы через D . Тогда

$$\int_0^r 4\pi r^2 \rho \, dr = \frac{4}{3} \pi r^3 D.$$

D — это функция от r , а ее производная D' — отрицательна, поскольку равновесие устойчиво.

Продифференцировав последнее уравнение, получим

$$4\pi r^2 \rho dr = 4\pi r^2 D dr + \frac{4}{3}\pi r^3 D' dr.$$

После сокращения множителя $4\pi r^2 dr$

$$3\rho = 3D + rD'. \quad (2)$$

Возьмем производную последнего уравнения:

$$3\rho' = 4D' + rD''; \quad (3)$$

это равенство мы впоследствии используем.

Сделаем еще одно замечание. Безусловно верно следующее:

$$3D \geq 3D + rD' \geq 0.$$

Первое неравенство верно, поскольку D' отрицательна; второе верно, поскольку ρ положительна. Отсюда

$$0 \geq \frac{rD'}{D} \geq -3.^1$$

Если жидкая масса однородна, $\frac{rD'}{3D} = 0$.

Если вся масса сосредоточена в центре сферы, $\frac{rD'}{D} = -3$.

Потенциал, создаваемый сферой радиуса r в точке, расположенной на ее поверхности, равен

$$\frac{4}{3}\pi r^2 D.$$

Сила, действующая на молекулу поверхности, равна

$$\frac{dV_0}{dr} = -\frac{4}{3}\pi r D. \quad (4)$$

Поскольку ρ и V_0 являются функциями только от r , можно предположить, что одна из них есть функция от другой. На основании соотношения (1), ΔV_0 есть функция от V_0 , т.е. $\Delta V_0 = f(V_0)$. Дифференцируя

¹ Величину $\frac{rD'}{D}$ принято называть параметром концентрации.

эту функцию, получаем

$$\frac{df(V_0)}{dV_0} = \frac{d(\Delta V_0)}{dV_0} = \frac{\frac{d\Delta V_0}{dr}}{\frac{dV_0}{dr}} = \frac{-4\pi\rho'}{-\frac{4}{3}\pi r D}.$$

Учитывая соотношение (3), получим

$$f'(V_0) = \frac{4D' + rD''}{rD}. \quad (5)$$

Разложение потенциала в ряд. Предположим теперь, что масса жидкости вращается с несколько большей скоростью. Поверхность ее деформируется, но незначительно. Потенциал, создаваемый сферой в некоторой точке, можно представить в виде суммы сферических функций:

$$V = V_0 + \sum HY,$$

где Y — некоторая сферическая функция, а H — коэффициент, который сам есть функция от r порядка ω^2 , так как V мало отличается от V_0 .

Уравнение Лапласа можно записать в следующем виде:

$$\Delta V = \Delta V_0 + \sum \Delta(HY) = -4\pi\rho, \quad (6)$$

причем согласно формуле, доказанной выше (стр. 50), имеет место равенство:

$$\Delta(HY) = Y \left[\frac{d^2 H}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dH}{dr} - \frac{n(n+1)}{r^2} H \right],$$

где n — порядок сферической функции Y .

Положим, что

$$U = V + \frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2);$$

тогда, как было доказано ранее, условие равновесия выглядит следующим образом: поверхности с постоянным значением U совпадают с поверхностями равной плотности.

Отсюда

$$\Delta V = -4\pi\rho \text{ есть функция от } U.$$

Поскольку величина ω^2 очень мала, V незначительно отличается от V_0 , а ΔV незначительно отличается от ΔV_0 .

Отношение между ΔV и V незначительно отличается от отношения между ΔV_0 и V_0 . Следовательно, можно записать

$$\Delta V = f(U) + \varphi(U),$$

где φ — некоторая функция, значение которой всегда порядка ω^2 .

Разложив правую часть предыдущего равенства по формуле Тейлора, получим

$$\Delta V = f(V_0) + (U - V_0)f'(V_0) + \dots + \varphi(V_0) + (U - V_0)\varphi'(V_0) + \dots$$

На основании сделанных предположений можно пренебречь бесконечно малыми членами второго порядка и записать

$$\Delta V = f(V_0) + (U - V_0)f'(V_0) + \varphi(V_0) = \Delta V_0 + (U - V_0)f'(V_0) + \varphi(V_0).$$

Наконец, учитывая равенство (6), можно записать

$$\sum \Delta(HY) = (U - V_0)f'(V_0) + \varphi(V_0).$$

Очевидно,

$$U - V_0 = \sum HY + \frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2).$$

Функцию $\frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2)$ можно в свою очередь представить в виде суммы сферических функций:

$$\begin{aligned} \frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2) &= \sum CY. \\ \frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2) &= \frac{\omega^2}{3}(x^2 + y^2 + z^2) + \frac{\omega^2}{6}(x^2 + y^2 - 2z^2) = \\ &= \frac{\omega^2 r^2}{3} + \frac{\omega^2 r^2}{6} \frac{x^2 + y^2 - 2z^2}{r^2}. \end{aligned}$$

Разложение сводится к сумме двух сферических функций $Y = 1$ и $Y = \frac{x^2 + y^2 - 2z^2}{r^2}$ с коэффициентами $C_1 = \frac{\omega^2 r^2}{3}$ и $C_2 = \frac{\omega^2 r^2}{6}$ соответственно.

Остальные коэффициенты равны нулю.

Учитывая вышеизложенное, можно записать

$$U - V_0 = \sum (H + C)Y,$$

$$\sum \Delta(HY) = \sum (H + C)Yf'(V_0) + \varphi(V_0).$$

Определение коэффициентов разложения. Для того чтобы найти значения коэффициента H , надо приравнять друг к другу коэффициенты при одинаковых членах Y .

Выражение

$$\Delta(HY)$$

содержит функцию Y как множитель, следовательно

$$\Delta(HY) = Y(H + C)f'(V_0) = Y(H + C)\frac{rD'' + 4D'}{rD}.$$

Возьмем $Y = 1$. Тогда

$$\Delta H = \left(H + \frac{\omega^2}{3}r^2\right)\frac{rD'' + 4D'}{rD} + \varphi(V_0). \quad (8)$$

Таким образом, коэффициент H определяется линейным уравнением второго порядка.

Возьмем теперь

$$Y = \frac{x^2 + y^2 - 2z^2}{r^2}.$$

В этом случае коэффициент H определяется уравнением

$$\Delta(HY) = \left(H + \frac{\omega^2 r^2}{6}\right)Y\frac{rD'' + 4D'}{rD}. \quad (9)$$

Для других значений Y имеет место уравнение

$$\Delta(HY) = HY\frac{rD'' + 4D'}{rD}. \quad (10)$$

Последние три уравнения имеют одно очевидное решение, $H = 0$. Докажем, что нет необходимости рассматривать другие решения.

В случае, когда Y представляет собой функцию первого порядка, можно найти соответствующее значение H . Действительно, существует три независимых функции первого порядка:

$$\frac{x}{r}, \quad \frac{y}{r}, \quad \frac{z}{r}.$$

Рассмотрим одну из них; например, $\frac{x}{r}$. Известно, что

$$\Delta V_0 = f(V_0).$$

Возьмем производные по x от каждой из частей равенства:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} (\Delta V_0) &= \frac{\partial}{\partial x} f(V_0), \\ \Delta \frac{\partial V_0}{\partial x} &= f'(V_0) \frac{\partial V_0}{\partial x}, \\ \Delta \left(\frac{dV_0}{dr} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} \right) &= f'(V_0) \frac{dV_0}{dr} \cdot \frac{\partial r}{\partial x}, \\ \Delta \left[\frac{dV_0}{dr} \cdot \frac{x}{r} \right] &= \frac{dV_0}{dr} \cdot \frac{x}{r} \frac{rD'' + 4D'}{rD}. \end{aligned}$$

Очевидно, что если $Y = \frac{x}{r}$, то уравнение

$$\Delta(HY) = HY \frac{rD'' + 4D'}{rD}$$

справедливо при $H = a \frac{dV_0}{dr}$. Это верно и для функций $Y = \frac{y}{r}$ и $Y = \frac{z}{r}$.

В таком случае члены первого порядка выглядят следующим образом:

$$\frac{dV_0}{dr} \left(\frac{ax + by + cz}{r} \right),$$

где a , b , c — некоторые константы. Как мы вскоре увидим, можно предположить, что эти константы равны нулю при условии, что центр тяжести тела совпадает с началом координат.

Эллипсоидальная форма уровней поверхностей. Рассмотрим некоторую уровенную поверхность, которая при отсутствии вращения имеет сферическую форму.

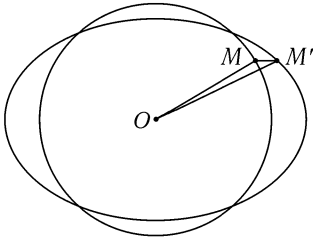


Рис. 9

При вращении точка M (рис. 9) перемещается в точку M' на новой уровенной поверхности. Нормальное смещение имеет следующий вид:

$$\zeta = MM' \cos(r, MM').$$

До деформации в точке M было верно равенство

$$\Delta V_0 = -4\pi\rho.$$

После деформации плотность в точке M' равна по-прежнему ρ , а плотность в точке M равна $\rho' = -\frac{\Delta V}{4\pi}$, где V — потенциал в точке M . Имеет место соотношение

$$\Delta V = \Delta V_0 - \zeta \frac{d\Delta V_0}{dr}.$$

Учитывая, что

$$\frac{d\Delta V_0}{dr} = \frac{d\Delta V_0}{dV_0} \cdot \frac{dV_0}{dr},$$

и воспользовавшись соотношениями (4) и (5), получим

$$\Delta V = \Delta V_0 + \frac{4\pi}{3}\zeta(4D' + rD'').$$

С другой стороны, мы можем записать

$$\Delta V = \Delta V_0 + \sum \Delta H Y.$$

Отсюда

$$\zeta = \frac{3}{4\pi(4D' + rD'')} \sum \Delta H Y. \quad (11)$$

Вернемся к уравнениям, определяющим коэффициенты H .

Объем фигуры равновесия, находящейся в состоянии покоя, равен объему той же фигуры, совершающей вращательное движение. Следовательно,

$$\int \zeta d\sigma = 0,$$

или

$$\int \sum \Delta H Y \, d\sigma = 0.$$

Можно записать следующее:

$$\sum \varphi(r) \int Y \, d\sigma = 0.$$

Каждое слагаемое равно нулю, за исключением первого, для которого Y равен единице. Отсюда, обозначив коэффициент при $Y_0 = 1$ через H_0 , получим

$$\Delta(H_0) = 0,$$

или, так как H_0 есть функция от r ,

$$\Delta H_0 = \frac{d^2 H_0}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dH_0}{dr} = 0.$$

Общее решение этого уравнения выглядит следующим образом:

$$H_0 = A + \frac{B}{r},$$

где A и B — константы.

Напомним, однако, что $V = V_0 + \sum H Y$. На бесконечном удалении от поверхности V и V_0 равны нулю. Значит, нулю равны и A , и B , иначе потенциал в центре тела станет бесконечным, что есть абсурд.

Уравнение (8), определяющее H , сводится в этом случае к виду

$$f'(V_0) \frac{\omega^2 r^2}{3} + \varphi(V_0) = 0.$$

Это уравнение определяет функцию $\varphi(V_0)$.

Нам еще предстоит убедиться, что для других значений функции Y единственным возможным значением коэффициента H является $H = 0$. Однако если допустить, что это так, то ζ сводится к одному члену, а именно,

$$\zeta = \frac{3}{4\pi} \frac{\Delta H Y_2}{4D' + rD''} = Y_2 \psi(r).$$

Отсюда

$$\zeta = \frac{x^2 + y^2 - 2z^2}{r^2} \psi(r).$$

Из этого уравнения видно, что уровенные поверхности являются эллипсоидами.

В самом деле,

$$(x^2 + y^2 + z^2) = (r + \zeta)^2 = r^2 + 2r\zeta + \zeta^2,$$

но величиной ζ^2 можно пренебречь, и тогда имеем

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2 + 2r \frac{x^2 + y^2 - 2z^2}{r^2} \psi(r).$$

Данное уравнение представляет собой уравнение эллипсоида вращения вокруг оси Oz [10].

Сжатие. Сжатием эллипсоида называется отношение разности длин его экваториального и полярного радиусов к среднему радиусу, который мы обозначили через r .

Чтобы найти эти радиусы, мы можем вычислить значения ζ для точек с координатами $(x = y = 0, z = r)$ и $(y = z = 0, x = r)$. Эти значения равны, соответственно,

$$\begin{aligned}\zeta &= -2r^2\psi(r), \\ \zeta &= r^2\psi(r).\end{aligned}$$

Значение разности радиусов равно

$$3r^2\psi(r);$$

отсюда сжатие

$$e = \frac{3r^2\psi(r)}{r} = 3r\psi(r) = \frac{3r\zeta}{x^2 + y^2 - 2z^2} = \frac{3\zeta}{rY},$$

где через Y обозначена сферическая функция

$$\frac{x^2 + y^2 - 2z^2}{r^2}.$$

Известно, что

$$\zeta = \frac{3}{4\pi} \frac{\sum \Delta H Y}{r D'' + 4 D'}.$$

Сумма здесь сводится к одному члену. Вспомним уравнение (9):

$$\Delta(HY) = \left(H + \frac{\omega^2 r^2}{6}\right) Y f'(V_0) = \left(H + \frac{\omega^2 r^2}{6}\right) Y \frac{4D' + rD''}{rD}.$$

Отсюда

$$4\pi r^2 DeY = \left(H + \frac{\omega^2 r^2}{6}\right) Y,$$

$$\Delta er^2 DY = \frac{9}{4\pi} \left[\Delta HY + \frac{\omega^2}{6} \Delta r^2 Y \right].$$

Но

$$\Delta r^2 Y = 0,$$

так как Y есть сферическая функция второго порядка.

Кроме того,

$$\frac{9}{4\pi} \Delta HY = (rD'' + 4D')erY.$$

Таким образом, уравнение принимает вид

$$\Delta er^2 DY = (rD'' + 4D')erY.$$

Ранее было доказано, что если P является сферическим полиномом степени n , то

$$\Delta(UP) = P \left[U'' + 2(n+1) \frac{U'}{r} \right].$$

Положив $n = 2$

$$U = eD,$$

$$P = r^2 Y,$$

получим уравнение

$$\frac{d^2(eD)}{dr^2} + \frac{6}{r} \frac{d(eD)}{dr} = eD'' + \frac{4D'e}{r};$$

преобразовав выражение, получим

$$e''D + 2e'D' + \frac{2}{r}eD' + \frac{6}{r}e'D = 0.^1$$

¹Это — первичное уравнение Клеро, служащее для определения профиля сжатия поверхностей равной плотности $e(r)$ по заданному закону распределения плотности $\rho(r)$.

Это уравнение представляет собой линейное однородное уравнение второго порядка, которое можно привести к уравнению первого порядка с помощью замены переменных¹:

$$\eta = \frac{re'}{e}, \quad \eta' = \frac{re''}{e} - \frac{re'^2}{e^2} + \frac{e'}{e}, \quad \frac{r^2 e''}{e} = r\eta' + \eta^2 - \eta.$$

Уравнение принимает вид

$$D(r\eta' + \eta^2 + 5\eta) + 2rD'(1 + \eta) = 0. \quad (12)$$

Это уравнение называется уравнением Клеро.

Пределы значения η . Ранее (стр. 61) было показано, что

$$-3 < \frac{rD'}{D} < 0.$$

Подставим эти крайние значения rD' в уравнение (12) и, откладывая по оси абсцисс значения η , а по оси ординат — значения $r\eta'$, построим две следующие параболы (рис. 10):

$$r\eta' + \eta^2 + 5\eta = 0$$

и

$$r\eta' + \eta^2 + 5\eta - 6(1 + \eta) = 0.$$

Точка с координатами $r\eta'$ и η может находиться только в области между двумя параболой (заштрихованная область на рисунке).

Докажем, что значение η заключено между 0 и 3.

Значение η не может быть отрицательным. В самом деле, если оно отрицательно для некоторого значения r_0 , то можно подобрать два таких положительных числа α и β , что

$$-\beta < \eta < -\alpha.$$

Кроме того, α и β могут даже удовлетворять неравенству

$$0 < \alpha < 2 < \beta < 5.$$

Я утверждаю, что η не может быть больше $-\alpha$.

¹Эту удачную замену первым сделал Радо.

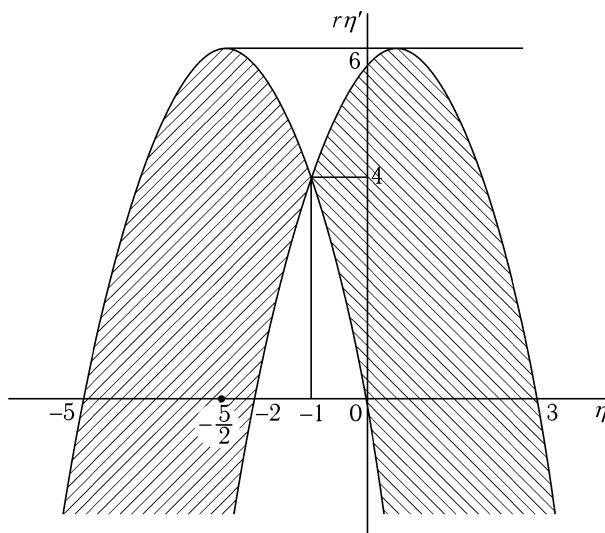


Рис. 10

Действительно, если бы величина η достигла значения $-\alpha$ для некоторого значения r , меньшего r_0 , то и $\frac{d\eta}{dr}$, и $r\frac{d\eta}{dr}$ стали бы отрицательными.

Точка с координатами $r\eta'$ и $\eta = \alpha$ находилась бы в этом случае вне заштрихованной области.

Рассуждая таким же образом, видим, что η не может быть меньше $-\beta$. В самом деле, если для некоторого значения r , меньшего r_0 , имеем $\eta < -\beta$, то и $\frac{d\eta}{dr}$, и $r\frac{d\eta}{dr}$ — положительны, а изображающая точка находится в той области плоскости, где не может быть точки с координатами $(r\eta', \eta)$.

Значит, если величина η отрицательна для r_0 , то для всех значений r , меньших r_0 , η находится между числами $-\alpha$ и $-\beta$, и верны следующие неравенства:

$$\frac{re'}{e} < -\alpha; \quad \frac{e'}{e} < -\frac{\alpha}{r}.$$

Интегрируя от $r < r_0$ до r_0 , получим

$$\ln \frac{e}{e_0} > \ln \left(\frac{r}{r_0} \right)^{-\alpha}, \quad e > Ar^{-\alpha}.$$

Отсюда, когда r стремится к нулю, значение e очень быстро увеличивается, и при достаточно малых r становится слишком большим, каким оно быть не может. Следовательно, значение η не может быть отрицательным.

Я утверждаю также, что $\eta < 3$. Доказательство аналогично вышеприведенному.

В самом деле, допустим, что для $r = r_0$ мы имеем $\eta = \eta_0 > 3$. Значит, для $r < r_0$ значение η будет также больше 3.

Действительно, неравенство перестанет выполняться, только если значение η будет меньше 3 или если оно станет отрицательным, пройдя через бесконечность. Последнее предположение следует отвергнуть по причинам, изложенным выше. Таким образом, необходимо только показать, что значение η не может быть равным 3. Если $\eta = 3$, то и η' , и $r\eta'$ становятся положительными, что есть абсурд. Точка с координатами $(r\eta', \eta)$ находится в этом случае вне области, заключенной между двумя рассматриваемыми кривыми. Следовательно, всегда верно неравенство

$$\eta < 3.$$

К тому же при $\eta > 3$

$$r\eta' + \eta^2 - \eta - 6 < 0.$$

A fortiori,

$$r\eta' + \eta^2 - \eta - 6 - 5(\eta - 3) < 0, \quad r\eta' + (\eta - 3)^2 < 0;$$

умножая последнее на dr , которое отрицательно, если r убывает в интервале от r_0 до 0, получим

$$\frac{dr}{r} + \frac{d\eta}{(\eta - 3)^2} > 0,$$

т. е.

$$d \ln \frac{1}{r} + d \frac{1}{\eta - 3} < 0, \quad \ln \frac{1}{r} + \frac{1}{\eta - 3} < \ln \frac{1}{r_0} + \frac{1}{\eta_0 - 3}.$$

Правая часть последнего неравенства есть величина конечная, а левая представляет собой сумму двух членов, из которых первый стремится к бесконечности, если r стремится к нулю. Следовательно, неравенство невозможно.

Отсюда,

$$0 < \eta < 3,$$

что и требовалось доказать.

Выясним, может ли значение η достигать своих пределов.

Если $\frac{rD'}{D} = 0$, то уравнение сводится к виду

$$r\eta' + \eta^2 + 5\eta = 0$$

и имеет решение

$$\eta = 0.$$

Если $\frac{rD'}{D} = -3$, то уравнение сводится к виду

$$r\eta' + (\eta - 3)(\eta + 2) = 0$$

и имеет решение $\eta = 3$.

Первый случай соответствует точке, расположенной внутри предположительно однородной жидкой массы, второй относится к точкам, находящимся вне массы жидкости, в частности, в том случае, когда вся масса сосредоточена в центре тела.

Я утверждаю, что в этих частных случаях единственно допустимыми решениями являются $\eta = 0$ и $\eta = 3$.

Предположим, что $\frac{rD'}{D} = 0$. Уравнение сводится к виду

$$r\eta' + \eta^2 + 5\eta = 0,$$

$$\frac{dr}{r} + \frac{d\eta}{\eta^2 + 5\eta} = 0$$

и имеет решение

$$\ln r + \frac{1}{5} \ln \frac{\eta}{\eta + 5} = C^{\text{te}}.$$

Для $r = 0$ получим

$$\ln \frac{\eta}{\eta + 5} = \infty;$$

отсюда $\eta = -5$. Но величина η всегда положительна для любого r , следовательно, постоянная интегрирования не может быть равна $-\infty$, и интеграл сводится к $\eta = 0$. То же верно и для $\eta = 3$, т. е. для случая массы,

сосредоточенной в центре тела. Вне массы жидкости имеет место уравнение

$$r\eta' + \eta^2 - \eta - 6 = 0,$$

общее решение которого выглядит следующим образом:

$$\ln r^5 = \ln \frac{\eta - 3}{\eta + 2} + C^{\text{те}}.$$

Постоянная интегрирования не может быть равна 0, и значит $\eta = 3$.

Только в этих двух случаях значение η может достигать своих пределов. В самом деле, допустим, что $\eta = 0$ при некотором значении r_0 и что $\eta > 0$ при некотором значении r , отличном от нуля. Следовательно, $\eta'(r_0) = 0$. Подставляя данные значения в уравнение Клеро, получим

$$D' = 0,$$

однако, поскольку

$$rD' + 3D = 3\rho,$$

то $D = \rho$. Таким образом, плотность в данной точке равна средней плотности, и, поскольку предполагается, что плотность не может уменьшаться по направлению к центру, ядро тела однородно.

Допустим также, что $\eta = 3$ при $r = r_0$. Как и в предыдущем случае, η' , по-видимому, равна нулю. Таким образом,

$$\frac{rD'}{D} = -3.$$

В данной точке $\rho = 0$. То же верно и для точек $r > r_0$. Значение ρ не может увеличиваться, поскольку тело находится в равновесии; следовательно, $\eta = 3$ при $r > r_0$.

Покажем, что $\eta = 3$ и в случае $r < r_0$. Допустим, что $\eta < 3$, тогда значение выражения $r^5(\eta - 3)$ будет уменьшаться при уменьшении r , а его производная будет положительной. Отсюда

$$r\eta' + 5(\eta - 3) > 0.$$

Уравнение Клеро может быть записано в следующем виде:

$$r\eta' + 5(\eta - 3) + (\eta - 3)^2 + \left[\frac{2rD'}{D} + 6 \right] (1 + \eta) = 0.$$

Поскольку два последних члена этого равенства положительны по своей сути, то должно выполняться равенство

$$r\eta' + 5(\eta - 3) < 0,$$

что противоречит установленному выше.

Следовательно, $\eta = 3$ и для $r < r_0$, а значит,

$$\left[\frac{2rD'}{D} + 6 \right] = 0.$$

Отсюда, $\rho = 0$ для $r < r_0$.

Таким образом, масса планеты целиком сосредоточена в ее центре.

Форма интегральных кривых. Рассмотрим теперь форму кривых, описываемых уравнением

$$r\eta' + \eta^2 + 5\eta + \frac{2rD'}{D}(1 + \eta) = 0.$$

Построим координатные оси $O\eta$ и Or .

По-видимому, достаточно рассмотреть участки кривых, соответствующие области значений

$$0 < \eta < 3.$$

Проведем прямую $\eta = 3$.

Вообще говоря, через каждую точку плоскости проходит одна и только одна кривая, за исключением случаев, когда функция η' не является голоморфной.

Но

$$\eta' = -\frac{\eta^2 + 5\eta + \frac{2rD'}{D}(1 + \eta)}{r}.$$

Функция η' не голоморфна при $r = 0$. Прямая $r = 0$ является интегральной кривой уравнения. На этой прямой имеются две особые точки, $\eta = 0$ и $\eta = -5$, в которых функция η' не определена при условии, что величина $\frac{rD'}{D}$ стремится к нулю вместе с r . Имеет место равенство

$$\frac{rD'}{D} = 3\left(\frac{\rho}{D} - 1\right).$$

Правая часть этого равенства непременно отрицательна, так как плотность слоя меньше средней плотности тела под этим слоем, поскольку предполагается, что тело находится в равновесии¹.

Когда r стремится к нулю, ρ стремится к некоторому пределу ρ_0 , и

$$\rho < D < \rho_0,$$

$$\frac{\rho}{\rho_0} - 1 < \frac{\rho}{D} - 1 < 0;$$

но $\frac{\rho}{\rho_0} - 1$ стремится к нулю вместе с r , значит, $\frac{\rho}{D} - 1$ также стремится к нулю, и, следовательно, величина $\frac{rD'}{D}$ стремится к нулю вместе с r .

В точках

$$r = 0, \quad \begin{cases} \eta = 0 \\ \eta = 5 \end{cases}$$

две интегральные кривые однозначно не определены.

Допустим, что значение r достаточно велико, тогда

$$\frac{rD'}{D} = -3.$$

Уравнение принимает вид

$$r\eta' + \eta^2 - \eta - 6 = 0.$$

Это уравнение непосредственно интегрируется, и его решение в общем виде выглядит следующим образом:

$$\frac{r^5(\eta - 3)}{\eta + 2} = C^{\text{те}}.$$

Интегральные кривые представляют собой асимптоты к прямой $\eta = 3$, однако они не обязательно являются асимптотами к прямой $r = 0$, поскольку $\frac{rD'}{D} \neq -3$ при $r = 0$; к этому случаю наши рассуждения неприменимы.

Рассмотрим прямоугольник $OABC$ (рис. 11), образуемый прямыми $\eta = 0$, $r = 0$, $\eta = 3$ и $r = r_0$, где r_0 — произвольное значение. Через

¹Правильнее сказать: в устойчивом равновесии, ибо равновесие формально возможно и при возрастании плотности от центра.

некоторую точку P , произвольно отмеченную на стороне OA , проходит одна и только одна интегральная кривая. Для данной точки значение функции

$$\eta' = -\frac{D'}{D} > 0;$$

следовательно, кривая, входящая в прямоугольник в точке P , выходит из него в некоторой точке, находящейся на стороне AB . Интегральная кривая не может дважды пересечь сторону OA , так как в этом случае она приобретет форму, аналогичную форме кривой PMP' , изображенной на рис. 12, а это невозможно, поскольку производная $\frac{dr}{d\eta}$ не может обращаться в нуль внутри прямоугольника.

Таким образом, данная кривая не может выйти из прямоугольника иначе, чем в точке M на стороне AB . Рассмотрим интегральную кривую, проходящую через точку Q , принадлежащую стороне CB . Угловым коэффициентом касательной в этой точке определяется выражением

$$\frac{dr}{d\eta} = -\frac{r}{\frac{4}{r} \left[6 + \frac{2rD'}{D} \right]}.$$

Этот коэффициент отрицателен, поскольку

$$\frac{2rD'}{D} > -6.$$

Следовательно, кривая, входящая в прямоугольник в точке Q , выходит из него в некоторой точке N , находящейся на стороне AB . Рассуждение, аналогичное предыдущему, показывает, что N — единственная точка, в которой данная кривая может выйти из прямоугольника. Кроме того, очевидно, что точка M расположена слева от точки N , поскольку интегральные кривые не могут пересекаться.

Таким образом, точка M стремится к некоторому пределу M' , когда точка P приближается к точке O , и точно так же точка N стремится к пределу N' , когда точка Q приближается к точке C .

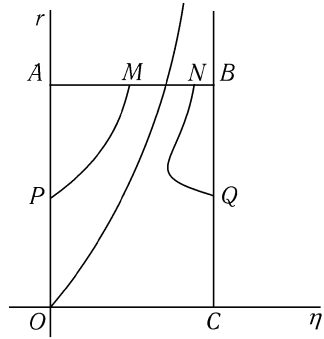


Рис. 11

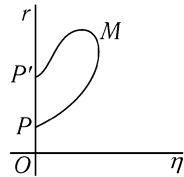


Рис. 12

Все возможные точки M' располагаются на некоторой кривой, которая полностью заключена между прямыми $\eta = 0$ и $\eta = 3$. То же относится и ко всем возможным точкам N' .

Возможно ли, чтобы точки M' и N' совпадали? Допустим, что это так. Тогда существует одна и только одна интегральная кривая, которая проходит через точку O . Очевидно, что эта кривая допустима в нашем случае, так как она не выходит за пределы, ограниченные прямыми $\eta = 0$ и $\eta = 3$. Из этого следует, что функция $\eta(r)$, а с ней и функция $\frac{re'}{e}$ вполне определены. Тогда

$$e = e_0 E^{\int_0^r \frac{\eta(r)}{r} dr},$$

где E — основание неперовых логарифмов.

Постоянную e_0 можно определить из одного из предыдущих уравнений, например

$$er^2 D = \frac{9}{4\pi} \left(H + \frac{\omega^2 r^2}{6} \right).$$

Возможность существования только одной приемлемой интегральной кривой. Докажем, что лишь одна интегральная кривая является приемлемой. Для этого докажем, что существует одна и только одна кривая, проходящая через точку $r = 0$, $\eta = 0$, а остальные кривые проходят через точку $r = 0$, $\eta = -5$.

Прежде всего докажем, что существует по крайней мере одна кривая, проходящая через точку $\eta = 0$, и одна, проходящая через точку $\eta = -5$.

Мы уже видели, как меняется знак $r\eta'$ при различных значениях η : величина $r\eta'$ отрицательна, когда η меньше -5 и больше 3 , и положительна, когда η находится в интервале от 0 до -2 .

В других интервалах возможны оба знака.

При $\eta = -5$ значение $r\eta'$ может быть нулевым или отрицательным, но не положительным.

При $\eta = -2$ значение $r\eta'$ может быть только положительным или нулевым.

Наконец, мы знаем, что функция $\frac{rD'}{D}$ стремится к нулю вместе с r . Причем, если дано некоторое положительное число α в окрестности

нуля, можно определить число r_1 такое, что при

$$r < r_1$$

верно неравенство

$$0 > \frac{rD'}{D} > -\alpha.$$

Уравнение Клеро может быть записано в следующем виде:

$$r\eta' + (\eta - \beta)(\eta + \gamma) = 0,$$

где β и γ — некоторые положительные числа, одно из которых стремится к нулю, а другое — к 5, когда α стремится к нулю.

В следующей таблице показано, как изменяется знак $r\eta'$ при $r < r_1$:

η	$-\infty$	-5	$-\gamma$	0	β	$+\infty$
$r\eta'$	$-$	$?$	$+$	$?$	$-$	

Существует два интервала, в которых знак $r\eta'$ неясен, однако эти интервалы меньше, чем те, что были определены ранее.

Докажем теперь, что для $r < r_1$ значение η непременно меньше β . Допустим, что $\eta = \eta_2 > \beta$ для некоторого значения $r_2 < r_1$. Я утверждаю, что если $r < r_2$, то $r > \beta$. В самом деле, неравенство будет выполняться, только если $\eta' = \beta$. Но тогда значение η' в данном интервале будет положительным, что противоречит правилу знаков.

Уравнение Клеро можно также записать в виде

$$r\eta' + (\eta - \beta)(\eta + \gamma) + 2\left(\frac{rD'}{D} + \alpha\right)(1 + \eta) = 0;$$

согласно условию,

$$\frac{rD'}{D} > -\alpha,$$

отсюда

$$r\eta' + (\eta - \beta)(\eta + \gamma) < 0.$$

A fortiori,

$$r\eta' + (\eta - \beta)^2 < 0,$$

$$\frac{\eta'}{(\eta - \beta)^2} + \frac{1}{r} < 0.$$

Интегрируя в интервале от r_1 до $r < r_1$, получим

$$\begin{aligned} -\ln \frac{1}{r} - \frac{1}{\eta - \beta} &> -\ln \frac{1}{r_1} - \frac{1}{\eta_1 - \beta}, \\ \ln \frac{1}{r} + \frac{1}{\eta - \beta} &< \ln \frac{1}{r_1} + \frac{1}{\eta_1 - \beta}. \end{aligned}$$

Согласно нашему допущению, значение разности $\eta - \beta$ положительно, значит, *a fortiori*,

$$\ln \frac{1}{r} < \ln \frac{1}{r_1} + \frac{1}{\eta_1 - \beta}.$$

Правая часть неравенства имеет определенное значение, а левая может увеличиваться и дальше этого предела; таким образом, сделанное нами допущение абсурдно. Следовательно,

$$\eta < \beta.$$

Предел η равен нулю, когда r стремится к нулю.

Я утверждаю далее, что уравнение Клеро имеет по крайней мере одно решение, стремящееся к -5 .

Действительно, допустим, что некоторое значение η_1 находится в интервале от $-\gamma$ до -5 ,

$$-5 < \eta_1 < -\gamma,$$

и рассмотрим интегральную кривую, проходящую через точку r_1, η_1 . Я утверждаю, что если $r_2 < r_1$, то $\eta_2 < \gamma$. В противном случае значение η' станет отрицательным при $\eta > -\gamma$, что противоречит правилу знаков.

Отсюда для достаточно малого r верно следующее:

$$-5 < \eta < -\gamma,$$

но мы вполне можем выбрать значение γ в окрестности 5. Отсюда η стремится к -5 .

Пусть η_0 и η_1 — решения, существование которых мы только что доказали. Им соответствуют решения e_0 и e_1 следующего линейного уравнения второго порядка:

$$4e''D + 2e'D + \frac{2}{r}D' + \frac{6}{r}e'D = 0.$$

Общее решение этого уравнения

$$e = Ae_0 + Be_1,$$

где A и B — некоторые константы. Общее решение уравнения Клеро имеет вид

$$\eta = \frac{re'}{e} = \frac{Are'_0 + Bre'_1}{Ae_0 + Be_1} = \frac{A\eta_0 \frac{e_0}{e_1} + B\eta_1}{A \frac{e_0}{e_1} + B}.$$

Однако мы знаем, что когда r стремится к нулю, η_1 стремится к -5 , а η_0 также стремится к нулю. Следовательно, значение разности $\eta_1 - \eta_0$ может быть меньше -4 . Отсюда

$$\frac{re'_1}{e_1} - \frac{re'_0}{e_0} < -4, \quad \frac{e'_1}{e_1} - \frac{e'_0}{e_0} < -\frac{4}{r}, \quad e_1 < e_0 r^{-4};$$

т. е. предел $\frac{e_0}{e_1}$ равен нулю, когда r стремится к нулю. Таким образом, когда r стремится к нулю, предел η равен пределу η_1 до тех пор, пока постоянная B отлична от нуля. Если $B = 0$, предел равен η_0 . Отсюда вытекает, что существует одно и только одно решение уравнения Клеро, стремящееся к нулю вместе с r , а именно, решение при $B = 0$ [11].

Соотношение между сжатием, силой притяжения и центробежной силой на экваторе. Как уже было отмечено, нельзя говорить о поверхностях равной плотности вне планеты, однако вполне можно говорить о внешних уровневых поверхностях.

Для таких поверхностей всегда верно равенство

$$\Delta V = \Delta V_0 + \Delta(HY) = 0.$$

Заметим, что вне массы жидкости $\Delta V_0 = -4\pi\rho$ обращается в нуль. Следовательно,

$$\Delta(HY) = 0, \quad \Delta(HY) = Y \left[H'' + \frac{2}{r} H' - \frac{n(n+1)}{r^2} H \right] = 0.$$

Возьмем $n = 2$, тогда

$$H'' + \frac{2}{r} H' - \frac{6}{r^2} H = 0.$$

Общее решение этого уравнения

$$H = Ar^2 + Br^{-3}.$$

Учитывая, что на бесконечном удалении H должно быть равно нулю, A следует также приравнять к нулю. Тогда

$$H = Br^{-3}.$$

Обозначим через M массу жидкости, заключенной в объеме V , ограниченном рассматриваемой уровенной поверхностью, и запишем

$$D = \frac{M}{V} = \frac{C}{r^3},$$

где $C = \frac{3M}{4\pi}$.

Уравнение

$$er^2 DY = \frac{9}{4\pi} \left[H + \frac{\omega^2 r^2}{6} \right] Y$$

принимает вид

$$\frac{eC}{r} = \frac{9}{4\pi} \left[\frac{B}{r^3} + \frac{\omega^2 r^2}{6} \right], \quad e = \frac{9}{4\pi} \left[\frac{B}{Cr^2} + \frac{\omega^2 r^3}{6C} \right].$$

Отсюда

$$re' = \frac{9}{4\pi} \left[\frac{-2B}{Cr^2} + \frac{3\omega^2 r^3}{6C} \right].$$

Таким образом,

$$re' + 2e = \frac{9}{4\pi} \frac{5\omega^2 r^3}{6C} = \frac{15}{8\pi C} \omega^2 r^3 = \frac{15\omega^2}{8\pi D}.$$

Так как мы положили

$$re' = e\eta,$$

то в конечном счете получим

$$e(\eta + 2) = \frac{15}{8\pi} \frac{\omega^2}{D}.$$

Это соотношение установлено для области вне массы жидкости, но верно и на ее поверхности.

Центробежная сила на экваторе равна $\omega^2 r$, сила притяжения на поверхности — $\frac{4}{3}\pi r D$. Обозначив отношение первой величины ко второй через φ , получим

$$e(\eta + 2) = \frac{5}{2}\varphi.$$

Значение η находится в интервале от 0 до 3, отсюда неравенство

$$\frac{5\varphi}{4} > e > \frac{\varphi}{2};$$

$\eta = 3$ только в том случае, когда тело однородно. Таким образом, сжатие достигает предела $\frac{\varphi}{2}$, только если планета однородна [12].

Определение полного комплекта коэффициентов H . Докажем, что уравнения

$$\Delta H Y = \frac{r D'' + 4 D'}{r D} H Y,$$

которые определяют коэффициенты H разложения

$$V = V_0 + \sum H Y,$$

не имеют иного решения, нежели $H = 0$.

Обозначим порядок сферической функции через n и положим

$$H = Z r^n D.$$

Уравнение примет вид

$$\Delta(Z r^n D Y) = \frac{r D'' + 4 D'}{r} Z r^n Y.$$

Выражение $r^n Y$ представляет собой сферический полином. Применив формулу

$$\Delta(P U) = \left[U'' + \frac{2n+2}{r} U' \right] P,$$

получим равенство

$$(Z D)'' + \frac{2n+2}{r} (Z D)' = Z D'' + \frac{4 Z D'}{r},$$

которое после преобразования запишется следующим образом:

$$Z''D + 2Z'\left(D' + \frac{n+1}{r}D\right) + \frac{2n-2}{r}ZD' = 0.$$

Произведя замену переменных

$$\frac{rZ'}{Z} = \varepsilon,$$

получим

$$r\varepsilon' + \varepsilon^2 + (2n+1)\varepsilon + \frac{2rD'}{D}(\varepsilon + n-1) = 0.$$

К этому уравнению применимы те же рассуждения, что и к уравнению Клеро. Значение $\frac{2rD'}{D}$ заключено между пределами 0 и -6 .

Таким образом, нам следует рассмотреть два уравнения

$$r\varepsilon' + \varepsilon^2 + (2n+1)\varepsilon = 0,$$

$$r\varepsilon' + \varepsilon^2 + (2n-5)\varepsilon - 6(n-1) = 0.$$

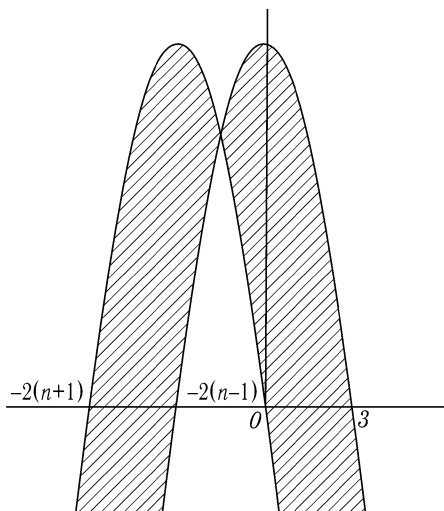


Рис. 13

Построим две параболы, откладывая ε по оси абсцисс, а $r\varepsilon'$ — по оси ординат (рис. 13). Как и в предыдущем случае¹, можно доказать, что значение ε может находиться только в интервале от 0 до 3.

Вне планеты $\Delta(HY) = 0$, или

$$H'' + \frac{2}{r}H' - \frac{n(n+1)}{r^2}H = 0.$$

Общее решение этого уравнения

$$H = ar^n + br^{-(n+1)};$$

поскольку H на бесконечном удалении обращается в нуль, a также равно нулю, следовательно,

$$H = br^{-n-1}, \quad Z = \frac{b}{C}r^{-2(n+1)},$$

откуда

$$\varepsilon = -2(n+1).$$

Но значение ε должно находиться в интервале от 0 до 3; значит, b также обращается в нуль.

Таким образом, единственное возможное решение, как снаружи так и внутри жидкой массы, это $H = 0$.

Этот вывод неприменим, когда $n = 1$ или 2, но эти случаи мы уже рассматривали [13].

Точное определение сжатия. Известно, что

$$\Delta V = \Delta V_0 + 4\pi\rho'\zeta, \quad \Delta(HY) = 4\pi\rho'\zeta, \quad e = \frac{3\zeta}{rY}.$$

Следовательно, верно равенство

$$\Delta(HY) = \frac{4}{3}\pi e\rho'rY;$$

учтя формулу

$$\Delta(HY) = Y \left[H'' + \frac{2H'}{r} - \frac{n(n+1)}{r^2}H \right],$$

¹См. рис. 10.

где $n = 2$, можно определить H из следующего линейного уравнения второго порядка:

$$H'' + \frac{2H'}{r} - \frac{6H}{r^2} = \frac{4}{3}\pi e\rho'r.$$

Общее решение только левой части этого уравнения —

$$H = \alpha r^2 + \beta r^{-3},$$

где α и β — постоянные интегрирования. Найдём решение всего уравнения, учитывая, что α и β суть функции от r . Метод вариации постоянных даёт

$$\alpha' r^2 + \beta' r^{-3} = 0, \quad (1)$$

следовательно,

$$H' = 2\alpha r - 3\beta r^{-4}, \quad H'' = 2\alpha' r - 3\beta' r^{-4} + 2\alpha + 12\beta r^{-5}.$$

Подставляя эти значения в первоначальное уравнение, получим

$$2\alpha' r - 3\beta' r^{-4} = \frac{4}{3}\pi e\rho'r. \quad (2)$$

Из уравнений (1) и (2) определяем α' и β' :

$$\alpha' = \frac{4\pi}{15}e\rho', \quad \beta' = -\frac{4\pi}{15}e\rho'r^5.$$

Таким образом,

$$H = \frac{4\pi r^2}{15} \int_a^r e\rho' dr - \frac{4\pi r^{-3}}{15} \int_b^r e\rho'r^5 dr.$$

Эта функция содержит две произвольных константы, a и b . Какими их следует выбрать? Пусть r_1 — это радиус планеты; для $r > r_1$ величины ρ и ρ' равны нулю, следовательно, интегралы сводятся к постоянным

$$\int_a^{r_1} \quad \text{и} \quad \int_b^{r_1}.$$

При $r = \infty$ величина H должна обратиться в нуль. Значит, коэффициент при r также равен нулю. Отсюда $a = r_1$.

При $r = 0$ величина H конечна. Значит, коэффициент при r^{-3} должен быть равен нулю. Отсюда $b = 0$.

Таким образом, значение H полностью определено.

Подставив это значение H в уравнение

$$er^2 D = \frac{9}{4\pi} \left[H + \frac{\omega^2 r^2}{6} \right],$$

получим

$$e = \frac{3}{5D} \int_{r_1}^r e\rho' dr - \frac{3}{5r^5 D} \int_0^r e\rho' r^5 dr + \frac{3}{8\pi} \frac{\omega^2}{D}.$$

Как будет выглядеть это выражение для поверхности планеты, когда $r = r_1$? Вместо D подставим D_1 — среднюю плотность планеты¹ — и получим

$$\begin{aligned} e &= -\frac{3}{5D_1 r^5} \int_0^{r_1} e\rho' r^5 dr + \frac{3}{8\pi} \frac{\omega^2}{D_1}, \\ e &= -\frac{3}{5r^5 D_1} \int_0^{r_1} e\rho' r^5 dr + \frac{\varphi}{2}, \end{aligned} \tag{3}$$

где φ — отношение центробежной силы на экваторе к силе притяжения.

Моменты инерции эллипсоида. Вычислим интеграл $\int Y^2 d\sigma$, где Y представляет собой функцию

$$\frac{x^2 + y^2 - 2r^2}{r^2}.$$

Имеем

$$x = r\sqrt{1 - \mu^2} \cos \varphi, \quad y = r\sqrt{1 - \mu^2} \sin \varphi, \quad z = r\mu, \quad d\sigma = d\mu d\varphi.$$

Таким образом, нужно вычислить значение интеграла

$$\int_0^{2\pi} \int_{-1}^{+1} (1 - 3\mu^2)^2 d\mu d\varphi = 2\pi \int_{-1}^{+1} (1 - 6\mu^2 + 9\mu^4) d\mu,$$

¹ D_1 — средняя плотность всей планеты.

которое равно

$$\int Y^2 d\sigma = \frac{16\pi}{5}. \quad (4)$$

Вычислим моменты инерции массы жидкости A , B , C :

$$A = \int \rho(y^2 + z^2) d\tau.$$

Имеем

$$\begin{aligned} \Delta V &= -4\pi\rho, \\ -4\pi A &= \int \Delta V(y^2 + z^2) d\tau, \\ -4\pi B &= \int \Delta V(z^2 + x^2) d\tau, \\ -4\pi C &= \int \Delta V(x^2 + y^2) d\tau, \\ -2\pi(A + B + C) &= \int \Delta V(x^2 + y^2 + z^2) d\tau. \end{aligned}$$

Но

$$\Delta V = \Delta V_0 + \Delta(HY)$$

и

$$\int \Delta(HY) r^2 d\tau = 0;$$

кроме того,

$$d\tau = r^2 dr d\mu d\varphi = dr d\sigma.$$

В итоге получим

$$\begin{aligned} \int \Delta HY r^2 d\tau &= \int \Delta(HY) r^2 dr d\sigma = \\ &= \int \frac{\Delta(HY)}{Y} r^2 dr \cdot Y d\sigma = \int f(r) dr \int Y d\sigma. \end{aligned}$$

Это произведение равно нулю, так как равен нулю второй интеграл. Следовательно,

$$2\pi(A + B + C) = \int \Delta V_0 r^2 d\tau = \int \Delta V_0 r^2 dr d\sigma$$

и, поскольку ΔV_0 зависит только от r ,

$$2\pi(A + B + C) = 4\pi \int \Delta V_0 r^4 dr.$$

Известно, что

$$r^2 \Delta V_0 = r^2 \frac{d^2 V_0}{dr^2} + 2r \frac{dV_0}{dr} = \frac{d}{dr} \left[r^2 \frac{dV_0}{dr} \right];$$

но

$$\frac{dV_0}{dr} = -\frac{4\pi r D}{3},$$

отсюда

$$A + B + C = \frac{8\pi}{3} \int_0^{r_1} r^2 \frac{d}{dr} (Dr^3) dr.$$

Принимая во внимание равенство $A = B$ и интегрируя по частям, получим

$$2A + C = \frac{8\pi}{3} \left[[r^5 D]_0^{r_1} - \int_0^{r_1} 2r^4 D dr \right].$$

Пренебрегая бесконечно малыми величинами, можно считать $A = C$,¹ тогда

$$C = \frac{8\pi}{9} \left[r_1^5 D_1 - 2 \int_0^{r_1} r^4 D dr \right].$$

Вычислим значение разности $C - A$. Имеем

$$4\pi(C - A) = \int \Delta V (z^2 - x^2) d\tau,$$

$$4\pi(C - B) = \int \Delta V (z^2 - y^2) d\tau.$$

Отсюда

$$8\pi(C - A) = - \int \Delta V r^2 Y d\tau,$$

где Y — это сферическая функция $\frac{x^2 + y^2 - 2z^2}{r^2}$.

¹Равенство $A = C$ предназначено только для подстановки в верхнее уравнение, что не противоречит нахождению ниже разности $C - A$.

Следовательно, как мы уже отмечали,

$$8\pi(C - A) = - \int \Delta V_0 r^2 Y \, d\tau - \int \Delta(HY) r^2 Y \, d\tau.$$

Первый интеграл равен нулю, так как он представляет собой произведение двух интегралов

$$\int \Delta V_0 r^4 \, dr \int Y \, d\sigma,$$

из которых последний равен нулю. Интеграл

$$\int \Delta(HY) r^2 Y \, d\sigma = \int \frac{\Delta(HY)}{Y} r^2 Y^2 \, d\tau = \int \frac{\Delta(HY)}{Y} r^4 \, dr \int Y^2 \, d\sigma$$

и, поскольку

$$\int Y^2 \, d\sigma = \frac{16\pi}{5}, \quad (5)$$

получим

$$\begin{aligned} 8\pi(C - A) &= -\frac{16\pi}{5} \int \frac{\Delta(HY)}{Y} r^4 \, dr = \\ &= -\frac{16\pi}{5} \int \frac{4}{3} \pi e \rho' r^5 \, dr = -\frac{64\pi^2}{15} \int_0^{r_1} e \rho' r^5 \, dr. \end{aligned}$$

Отсюда

$$C - A = -\frac{8\pi}{15} \int_0^{r_1} e \rho' r^5 \, dr,$$

что есть величина положительная.

Таким образом, обратясь к формуле (3) на стр. 87, получим

$$e_1 - \frac{\varphi}{2} = \frac{9}{8\pi} \frac{C - A}{r_1^5 D}.$$

Можно выдвинуть гипотезу, отличную от гипотезы Клеро. Предположим, например, существование твердого неоднородного ядра, покрытого жидкостью; полученное нами соотношение будет верно и для этого случая.

Сопоставление теории и наблюдений. Положим $\frac{C-A}{C} = J$, тогда

$$e_1 - \frac{\varphi}{2} = \frac{J}{r_1^5 D_1} \left[r_1^5 D_1 - 2 \int_0^{r_1} r^4 D dr \right] = J \left[1 - \frac{2 \int_0^{r_1} r^4 D dr}{r_1^5 D_1} \right].$$

Величина e_1 известна из геодезических измерений и равна $\frac{1}{293,5}$, величина φ измерена физиками и равна $\frac{1}{288,38}$, а величина J найдена из предварения равноденствий и равна $0,0032753 = \frac{1}{305,31}$.¹ Таким образом, имеет место равенство

$$\frac{2 \int r^4 D dr}{r_1^5 D_1} = 1 - \frac{e_1 - \varphi}{J} = 0,49145.$$

Вернемся к уравнению Клеро:

$$r\eta' D + (\eta^2 + 5\eta)D + 2rD'(1 + \eta) = 0;$$

имеем

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} \left[r^5 \sqrt{1 + \eta} D \right] &= \frac{r^5 \eta' D}{2\sqrt{1 + \eta}} + \frac{\varphi r^5 D'(1 + \eta)}{\varphi \sqrt{1 + \eta}} + \frac{5r^4 D(1 + \eta)}{\sqrt{1 + \eta}} = \\ &= \frac{5r^4 D}{\sqrt{1 + \eta}} \left[1 + \eta + \frac{r\eta'}{10} + \frac{r(1 + \eta)}{5} \frac{D'}{D} \right]. \end{aligned}$$

Отсюда можно записать уравнение Клеро следующим образом:

$$\frac{d}{dr} \left[r^5 \sqrt{1 + \eta} D \right] = \frac{5r^4 D}{\sqrt{1 + \eta}} \left[1 + \eta - \frac{\eta^2}{10} - \frac{\eta}{2} \right] = \frac{5r^4 D}{\sqrt{1 + \eta}} \left[1 + \frac{\eta}{2} - \frac{\eta^2}{10} \right].$$

Интегрируя от 0 до r_1 , получаем

$$r_1^5 \sqrt{1 + \eta_1} D_1 = \int_0^{r_1} \frac{5r^4 D}{\sqrt{1 + \eta}} \left[1 + \frac{\eta}{2} - \frac{\eta^2}{10} \right] dr.^2$$

¹Современные значения характеристик Земли см., например, в книге К. Е. Буллена «Плотность Земли».

²Эта форма уравнения Клеро называется уравнением Радо. Его ценность в том, что подынтегральная функция очень слабо зависит от параметра η (см. далее функцию $K(\xi)$).

Здесь можно применить теорему о среднем, так как функция $5r^4 D$ положительна. Обозначив некоторое число, заключенное в интервале от 0 до 3, через ξ , получим

$$r_1^5 \sqrt{1 + \eta_1} D_1 = \frac{1 + \frac{\xi}{2} - \frac{\xi^2}{10}}{\sqrt{1 + \xi}} \int 5r^4 D dr$$

для некоторого значения r , заключенного в интервале от 0 до r_1 .

Понаблюдаем за изменениями величины

$$K = \frac{1 + \frac{\xi}{2} - \frac{\xi^2}{10}}{\sqrt{1 + \xi}},$$

когда ξ изменяется в интервале от 0 до 3:

$\xi = 0$	$K = 1$
$\xi = \frac{1}{3}$	$K = 1,00075$ максимум
$\xi = \frac{1}{2}$	$K = 1,0002$
$\xi = 0,53$	$K = 1$
$\xi = \eta_1 = 0,544$	$K_1 = 0,99954$
$\xi = 1$	$K = 0,989$
$\xi = 2$	$K = 0,9$
$\xi = 3$	$K = 0,8$.

Мы видим, что значение K изменяется очень мало, оставаясь в интервале от 0,99954 до 1,00075, т.е. очень близко к 1. Заменяв η_1 в формуле значением 0,544, получим

$$\frac{2 \int r^4 D dr}{r_1^5 D_1} = \frac{2}{5K} \sqrt{1 + \eta_1} = 0,497 \frac{1}{K} > 0,49663.$$

Ранее мы получили для той же величины значение 0,49145.

Как объяснить эту разницу?

Можно допустить, что величины, входящие в формулу, т.е. J и e_1 , были измерены с некоторой погрешностью.

Из первого уравнения получим в качестве точного значения следующее:

$$\begin{aligned}\frac{2 \int r^4 D dr}{r_1^5 D_1} &= 0,49145 - \frac{1}{J} \delta e_1 + \frac{e_1 - \varphi}{J^2} \delta J = \\ &= 0,49145 - 305,31 \delta e_1 + 155,26 \delta J.\end{aligned}$$

Из второго:

$$\begin{aligned}\frac{2K \int r^4 D dr}{r_1^5 D_1} &= \frac{-(\eta_1 + 2) de}{5e\sqrt{1 + \eta_1}}, \\ \frac{2K \int r^4 D dr}{r_1^5 D_1} &= 0,49700 - 120,18 \delta e_1.\end{aligned}$$

Допустим, что $\delta J = 0$. Для того чтобы формулы оставались сравнимыми, необходимо, чтобы величина δe_1 была равна $-0,000027$; e_1 тогда будет равно $\frac{1}{295,85}$.

Если допустить, что погрешность была внесена J , то

$$\delta J = 0,000034.$$

В этом случае $J = \frac{1}{302,18}$.

Допустимо ли это? Заметим прежде всего, что величина J , фигурирующая в данной формуле, есть не что иное, как, приближенно, $\frac{C - A}{C}$.

Исходя из этого, величину J можно заменить выражением

$$\frac{J}{1 - \frac{2}{3}J}.$$

Допущенная погрешность δJ равна $\frac{2}{3}J^2$, или

$$\delta J = 0,000006.$$

Значит, погрешность внесена другой величиной.

С другой стороны, измерения нутации достаточно точны. Обозначив постоянную нутации через N , получим

$$N = \frac{\mu}{1 + \mu} J [5,36542],$$

где μ — отношение $\frac{L}{T}$ массы Луны к массе Земли; число в квадратных скобках представляет собой не коэффициент, а логарифм этого отношения.

Предварение равноденствий (p) есть сумма двух членов,

$$p = p' + p'';$$

первый из них связан с притяжением Луны,

$$p' = 866135 \frac{\mu}{1 + \mu} J = 34,38,$$

а второй — с притяжением Солнца,

$$p'' = 4871,05 J = 15,95.$$

Положим

$$\frac{\mu}{1 + \mu} = \varepsilon.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \frac{\delta N}{N} &= \frac{\delta \varepsilon}{\varepsilon} + \frac{\delta J}{J}, \\ \delta p &= p' \left[\frac{\delta \varepsilon}{\varepsilon} + \frac{\delta J}{J} \right] + p'' \frac{\delta J}{J} = p' \frac{\delta \varepsilon}{\varepsilon} + p \frac{\delta J}{J}. \end{aligned}$$

Величина p определена точнее, чем N , поэтому можно допустить $\delta p = 0$. Принимая $\frac{\delta J}{J} = 0,000034 \times 305,31 = 0,0103$ и решая систему уравнений, получим

$$\begin{aligned} \frac{\delta \varepsilon}{\varepsilon} &= -0,015, \\ \frac{\delta N}{N} &= 0,005. \end{aligned}$$

Исходя из этого, мы можем считать значение N равным $9''17$ вместо $9''21$, а значение μ равным $\frac{1}{81,5}$ вместо $\frac{1}{82}$. На первый взгляд, эти цифры трудно принять.

Можно, кроме того, предположить, что общая погрешность является суммой погрешностей, внесенных каждым из членов.

Другое объяснение заключается в том, что гипотеза Клеро лишь приблизительно учитывает члены второго порядка. Однако Калландро, производивший вычисления, показал, что при учете членов второго порядка вдавливание эллипсоида составит всего лишь 9 метров. Этой величиной можно пренебречь.

Можно также спросить, до какой степени точна гипотеза Клеро. Допустим, например, что Земля сейчас представляет собой целиком твердое тело, за исключением морей. В момент затвердевания слои подчинялись закону Клеро, однако начиная с этого момента скорость вращения может изменяться (например, приливы замедляют вращение). Кроме того, сжатие внутренних эллипсоидов также может изменяться вследствие оседания гор и континентов.

Наконец, можно предположить, что некоторая часть внутреннего объема Земли остается жидкой: в этом случае две жидкие части и твердая оказывают каждая свое влияние на явление прецессии. Однако гипотеза о жидком ядре Земли едва ли правдоподобна [14].

До сих пор мы рассматривали планеты как жидкие массы и показали, каким должно быть распределение плотностей внутри этих масс.

Предположим теперь, что существует твердое тело некоторой формы с некоторым распределением плотностей внутри него, полностью покрытое слоем жидкости малой толщины, который испытывает воздействие силы тяжести и центробежной силы, связанной с вращением твердого тела.

Внешняя поверхность тела представляет собой уровенную поверхность, для которой верно равенство

$$U = V + \frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2) = C^{\text{те}},$$

но эквипотенциальные поверхности внутри тела не обязательно являются поверхностями равной плотности.

ГЛАВА 5

ТВЕРДОЕ ТЕЛО, ПОКРЫТОЕ СЛОЕМ ЖИДКОСТИ

Теорема Стокса. *Если известны форма внешней поверхности тела S , его масса M и угловая скорость вращения ω , можно определить значение потенциала V в любой внешней точке.*

Существует бесконечное множество законов распределения материи внутри ядра, которые могут дать одну и ту же внешнюю поверхность тела. Однако каким бы ни было это распределение, потенциал V снаружи тела полностью определяется через величины S , M и ω .

Действительно, вне притягивающей массы функция V удовлетворяет уравнению $\Delta V = 0$. На бесконечном удалении от тела $V = 0$, на поверхности же

$$V + \frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2) = U = K,$$

и, наконец, имеет место равенство

$$\int \frac{dV}{dn} d\sigma = -4\pi M.$$

Задача определения V , таким образом, полностью решена. В самом деле, допустим, что существует какое-то другое решение, и обозначим его V' . Тогда

$$V - V' = U - U' = K - K' = C^{\text{те}}.$$

Известно, что $\Delta(V - V') = 0$.

Поскольку функция $V - V'$ постоянна на поверхности тела, она представляет собой потенциал электрического заряда, распределенного по поверхности.

Этот заряд определяется выражением

$$\int \frac{\partial(V - V')}{\partial n} d\sigma,$$

где интеграл берется по внешней поверхности. Однако в данном случае заряд равен нулю, так как

$$\int \frac{dV}{dn} d\sigma = -4\pi M, \quad \int \frac{dV'}{dn} d\sigma = -4\pi M.$$

Потенциал $V - V'$ нулевого заряда также равен нулю, что и требовалось доказать.

Таким образом, из опыта с маятником, позволяющего определить значения g на различной высоте, мы не узнаем относительно распределения внутренних масс ничего такого, что не было бы нам уже известно из величин, упоминаемых в теореме Стокса. Не больше мы узнаем и изучая пертурбации, вызываемые движением других небесных тел.

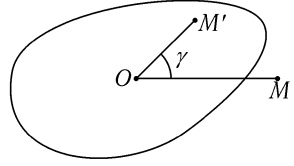


Рис. 14

Разложение функции $\frac{1}{MM'}$ в ряд полиномов. Пусть точка O — начало координат, M' — притягивающая точка плотности ρ' с координатами x', y', z' , а $M(x, y, z)$ — притягиваемая точка (рис. 14).

В полярных координатах:

$$\begin{aligned} x &= r\sqrt{1-\mu^2} \cos \varphi, & y &= r\sqrt{1-\mu^2} \sin \varphi, & z &= r\mu, \\ x' &= r'\sqrt{1-\mu'^2} \cos \varphi', & y' &= r'\sqrt{1-\mu'^2} \sin \varphi', & z' &= r'\mu'. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} MM'^2 &= r^2 - 2rr' \cos \gamma + r'^2 = \\ &= x^2 + y^2 + z^2 - 2(xx' + yy' + zz') + x'^2 + y'^2 + z'^2; \\ \frac{1}{MM'} &= \frac{1}{r\sqrt{1 - \frac{2r' \cos \gamma}{r} + \frac{r'^2}{r^2}}}, \\ r^2 &= x^2 + y^2 + z^2, \\ r'^2 &= x'^2 + y'^2 + z'^2, \\ \cos \gamma &= \frac{x}{r} \frac{x'}{r'} + \frac{y}{r} \frac{y'}{r'} + \frac{z}{r} \frac{z'}{r'}. \end{aligned}$$

Разложим функцию по возрастающим степеням $\frac{1}{r}$, коэффициентом при $\frac{1}{r^n}$ будет полином $H_n(x, y, z; x', y', z')$.

Должны выполняться равенства

$$\Delta\left(\frac{1}{MM'}\right) = 0,$$

$$\Delta'\left(\frac{1}{MM'}\right) = 0.$$

В первом из них x, y, z рассматриваются как переменные, а x', y', z' — как фиксированные значения; во втором — наоборот.

Получим

$$\Delta\left(\frac{1}{MM'}\right) = \frac{\partial^2 \frac{1}{MM'}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \frac{1}{MM'}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \frac{1}{MM'}}{\partial z^2} = 0,$$

$$\Delta'\left(\frac{1}{MM'}\right) = \frac{\partial^2 \frac{1}{MM'}}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 \frac{1}{MM'}}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 \frac{1}{MM'}}{\partial z'^2} = 0.$$

Известно, что

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2\frac{r'}{r} \cos \gamma + \frac{r'^2}{r^2}}} = 1 + P_1 \frac{r'}{r} + \dots + P_n \left(\frac{r'}{r}\right)^n + \dots,$$

где P_n — полином по $\cos \gamma$ следующего вида:

$$A_0 \cos^n \gamma + A_2 \cos^{n-2} \gamma + \dots$$

Заменив $\cos \gamma$ его значением, получим

$$P_n = \frac{Q(x, y, z; x', y', z'; r, r')}{r^n r'^n}.$$

Полином Q представляет собой однородный полином степени n по отношению к каждой из систем переменных (x, y, z, r) и (x', y', z', r') . Впрочем, он содержит переменные r и r' только в четной степени, так что можно заменить r^2 и r'^2 их значениями

$$x^2 + y^2 + z^2 \quad \text{и} \quad x'^2 + y'^2 + z'^2.$$

Получим

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2\frac{r'}{r} \cos \gamma + \frac{r'^2}{r^2}}} = \sum \frac{Q'_n(x, y, z; x', y', z')}{r^{2n}},$$

$$\frac{1}{MM'} = \sum \frac{Q'_n}{r^{2n+1}},$$

где Q'_n — однородный полином степени n по отношению к каждому из наборов переменных, (x, y, z) и (x', y', z') , которые входят в состав полинома симметричным образом.

Как уже отмечалось,

$$\Delta' \frac{1}{MM'} = 0.$$

Отсюда

$$\Delta' \frac{Q'_n}{r^{2n+1}} = 0$$

и, поскольку r не зависит от x', y', z' , можно записать

$$\Delta'(Q') = 0.$$

Таким образом, Q' есть сферический полином степени n по отношению к переменным (x, y, z) и, следовательно, к переменным (x', y', z') .

Известно, что существует $2p+1$ сферических полиномов порядка p вида

$$P_{p,q} = r^p e^{iq\varphi} (1 - \mu^2)^{q/2} \frac{d^{p+q}(1 - \mu^2)^p}{d\mu^{p+q}},$$

где q принимает значения

$$-p, -p+1, \dots, -1, 0, 1, 2, \dots, p-1, p.$$

Значит, можно записать

$$Q' = \sum P_{p,q} Q_{p,q},$$

где P есть фундаментальный полином в переменных x, y, z , а Q — полином в переменных x', y', z' . Впрочем, Q является функцией от

$$\cos \gamma = \mu \mu' + \sqrt{1 - \mu^2} \sqrt{1 - \mu'^2} \cos(\varphi - \varphi').$$

Таким образом, Q' зависит только от значения разности $\varphi - \varphi'$. Отсюда вытекает, что коэффициент при $P_{p,q}$ может быть только вида

$$Q_{p,q} = r'^p e^{-iq\varphi} (1 - \mu'^2)^{q/2} \frac{d^{p+q}(1 - \mu'^2)^p}{d\mu^{p+q}},$$

и, следовательно, можно записать

$$\frac{1}{MM'} = \sum \frac{A_{p,q} P_{p,q} P'_{p,-q}}{r^{2p+1}},$$

где $A_{p,q}$ — численный коэффициент, который можно легко определить.

Применение. Предположим, что величина r достаточно велика по отношению к радиусу планеты. Разложим потенциал по возрастающим степеням $\frac{1}{r}$ и получим

$$V = \sum \frac{B_{p,q} P_{p,q}}{r^{2p+1}}.$$

Согласно приведенному выше доказательству, чтобы определить V , достаточно знать значения S , M и ω . Эти же значения позволяют определить и $B_{p,q}$. Известно, что

$$V = \int \frac{\rho' d\tau}{MM'} = \sum \frac{A_{p,q} P_{p,q}}{r^{2p+1}} \int \rho' P'_{p,-q} d\tau.$$

Отсюда

$$B_{p,q} = A_{p,q} \int \rho' P'_{p,-q} d\tau',$$

где $P'_{p,q}$ — один из фундаментальных сферических полиномов степени p . Интеграл

$$\int \rho' P'_{p,q} d\tau'$$

вполне можно вычислить.

Рассмотрим сначала полином нулевого порядка $P_{0,0} = 1$. Получим

$$\int \rho' d\tau' = M.$$

Полиномы первого порядка равны x' , y' , z' . Отсюда получим следующие интегралы:

$$\int \rho' x' d\tau', \quad \int \rho' y' d\tau', \quad \int \rho' z' d\tau'.$$

Значения этих интегралов представляют собой координаты центра тяжести тела с точностью до некоторого коэффициента. Допустим, что внешняя поверхность имеет центр симметрии, и разместим начало координат в этом центре. Данные интегралы в этом случае будут равны нулю, так как равны нулю коэффициенты $\frac{x}{r^3}$, $\frac{y}{r^3}$, $\frac{z}{r^3}$ при членах разложения потенциала и поскольку для эквипотенциальных поверхностей начало координат выступает как центр симметрии. Центр тяжести планеты совпадает с ее центром симметрии.

Полиномы второго порядка равны

$$x'y', \quad y'z', \quad z'x', \quad z'^2 - x'^2, \quad z'^2 - y'^2.$$

Если $\int x'y'\rho' d\tau' = 0$ — так же, как и два других аналогичных интеграла, — то координатные оси являются главными осями инерции системы. Если известен интеграл $\int (x'^2 - y'^2)\rho' d\tau'$, то известна и разность главных моментов инерции.

Существует соотношение между e_1 , r_1 , D_1 и ω : две первые величины определяются из S , D_1 — из S и M , φ — из ω , значение разности $C - A$ также известно. Можно заключить, что соотношение, выведенное из уравнения Клеро, истинно, и все же внутреннее распределение материи, по-видимому, не согласуется с теоретическими заключениями¹.

Соотношение между сжатием, силой притяжения и центробежной силой на экваторе. Определим первые члены разложения функции $\frac{1}{MM'}$.

Согласно формуле бинома

$$\frac{1}{MM'} = \frac{1}{r} \left[1 - \frac{1}{2} \left(-\frac{2r'}{r} \cos \gamma + \frac{r'^2}{r^2} \right) + \frac{3}{8} \left(\frac{2r'}{r} \cos \gamma - \frac{r'^2}{r^2} \right)^2 + \dots \right];$$

¹См. главу 4.

пренебрегая членами порядка $\frac{1}{r^4}$, получим

$$\begin{aligned}\frac{1}{MM'} &= \frac{1}{r} + \frac{r' \cos \gamma}{r^2} + \frac{1}{r^3} \left[-\frac{r'^2}{2} + \frac{3}{2} r'^2 \cos^2 \gamma \right], \\ \frac{1}{MM'} &= \frac{1}{r} + \frac{1}{r^3} \left[xx' + yy' + zz' - \frac{(x'^2 + y'^2 + z'^2)}{2} \right] + \\ &+ \frac{3}{2r^5} (xx' + yy' + zz')^2 = \frac{1}{r} + \frac{1}{r^3} (xx' + yy' + zz') - \\ &- \frac{1}{2r^5} [(x^2 + y^2 + z^2)(x'^2 + y'^2 + z'^2) - 3(xx' + yy' + zz')^2].\end{aligned}$$

Коэффициент при члене $-\frac{1}{2r^5}$ можно записать

$$\begin{aligned}-\frac{3}{2}(x^2 - y^2)(x'^2 - y'^2) - \frac{1}{2}(x^2 + y^2 - 2z^2)(x'^2 + y'^2 - 2z'^2) - \\ - 6(xx'yy' + xx'zz' + yy'zz').\end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned}V &= \int \frac{\rho' d\tau'}{MM'} = \\ &= \int \frac{\rho' d\tau}{r} + \sum \frac{x}{r^3} \int \rho' x' d\tau' + \frac{3(x^2 - y^2)}{4r^5} \int (x'^2 - y'^2) \rho' d\tau' + \\ &+ \frac{1}{4} \frac{(x^2 + y^2 - 2z^2)}{r^5} \int (x'^2 + y'^2 - 2z'^2) \rho' d\tau' - 6 \sum \frac{xy}{r^5} \int x' y' \rho' d\tau'.^1\end{aligned}$$

Если M — масса тела, α, β, γ — координаты его центра тяжести, а A, B, C — главные оси инерции, то

$$\begin{aligned}V &= \frac{M}{r} + \frac{\alpha x + \beta y + \gamma z}{r^3} + \frac{1}{4r^5} \left[3(x^2 - y^2)(B - A) + \right. \\ &\left. + (x^2 + y^2 - 2z^2)(-A - B + 2C) - 6 \sum \frac{xy}{r^5} \int x' y' \rho' d\tau' \right].\end{aligned}$$

¹Множитель при последнем члене в этой, а также в следующей формуле должен быть не «-6», но «+3».

Предположим, что поверхность является поверхностью вращения, что начало координат расположено в центре тела, ограниченного этой поверхностью, и что координатные оси совпадают с главными осями инерции. Тогда

$$B = A$$

и

$$V = \frac{M}{r} + \frac{1}{2r^5}(x^2 + y^2 - 2z^2)(C - A).$$

Вычислим значение потенциала V для внешней поверхности тела, являющегося, как мы полагаем, эллипсоидом со сжатием e_1 . Формула для вычисления потенциала имеет вид

$$V = \frac{M}{r} + HY + \sum QZ,$$

где Y — функция

$$\frac{x^2 + y^2 - 2z^2}{r^2},$$

а Z — некоторая сферическая функция, отличная от Y .

Коэффициенты H и Q должны иметь определенную форму, так как потенциал на бесконечном удалении от поверхности должен быть равен нулю. Как мы уже видели, выполняются равенства

$$H = \frac{H_0}{r^3}, \quad Q = \frac{q_0}{r'^{2n+1}},$$

где H_0 и q_0 — некоторые константы. Отсюда

$$V = \frac{M}{r} + \frac{H_0 Y}{r^3} + \sum \frac{q_0 Z}{r^{n+1}}.$$

На свободной поверхности

$$U = V + \frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2) = C^{\text{те}},$$

$$U = V + \frac{\omega^2}{3}r^2 + \frac{\omega^2 r^2 Y}{6} = C^{\text{те}}.$$

Таким образом,

$$\frac{M}{r} + \frac{\omega^2 r^2}{3} + \frac{\omega^2 r^2 Y}{6} + \frac{H_0 Y}{r^3} + \sum \frac{q_0 Z}{r^{n+1}} = C^{\text{те}}.$$

Положим

$$r = r_1 + \zeta.$$

Как мы уже знаем (стр. 68),

$$e_1 = \frac{3\zeta}{r_1 Y};$$

значит,

$$r = r_1 \left[1 + \frac{e_1 Y}{3} \right].$$

Так как все слагаемые, кроме первого, малы, можно пренебречь величиной e_1^2 и записать

$$\frac{M}{r} = \frac{M}{r_1 \left(1 + \frac{e_1 Y}{3} \right)} = \frac{M}{r_1} \left(1 - \frac{e_1 Y}{3} \right).$$

Таким образом, уравнение $U = C^{\text{те}}$ сводится к виду

$$\frac{M}{r_1} - \frac{M e_1 Y}{3 r_1} + \frac{\omega^2 r_1^2}{3} + \frac{\omega^2 r_1^2 Y}{6} + \frac{H_0 Y}{r_1^3} + \frac{\sum q_0 Z}{r_1^{n+1}} = C^{\text{те}}.$$

Поскольку, согласно предположению, мы имеем дело с эллипсоидом, то $q_0 = 0$; значит, потенциал V равен

$$\frac{M}{r} + \frac{H_0 Y}{r^3}.$$

Сравнив два значения потенциала, можно заключить, что

$$H_0 = \frac{C - A}{2}.$$

Отсюда

$$\frac{M}{r_1} - \left(\frac{M e_1}{3 r_1} - \frac{C - A}{2 r_1^3} \right) Y + \frac{\omega^2 r_1^2}{3} + \frac{\omega^2 r_1^2 Y}{6} = C^{\text{те}};$$

можно заключить, что коэффициент при Y равен нулю, и

$$\frac{M e_1}{3 r_1} = \frac{C - A}{2 r_1^3} + \frac{\omega^2 r_1^2}{6}.$$

Впрочем, известно, что

$$M = \frac{4}{3}\pi D_1 r_1^3, \quad g_0 = \frac{M}{r_1^2}, \quad \omega^2 r_1 = \varphi g_0 = \varphi \frac{M}{r_1^2}.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \frac{C-A}{2r_1^3} &= g_0 \frac{r_1 e_1}{3} - \frac{\varphi g_0 r_1}{6}, \\ \frac{C-A}{r_1^3} &= \frac{2r_1 g_0}{3} \left(e_1 - \frac{\varphi}{2} \right); \end{aligned}$$

приняв радиус Земли за единицу, можно записать

$$C-A = \frac{2g_0}{3} \left(e_1 - \frac{\varphi}{2} \right).$$

Значение силы тяжести в некоторой точке поверхности.

Составляющими силы тяжести являются $\frac{\partial U}{\partial x}$, $\frac{\partial U}{\partial y}$, $\frac{\partial U}{\partial z}$, и имеет место равенство

$$g = \sqrt{\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2}.$$

Обозначив угол между вертикалью и радиусом OM через ε , получим выражение для составляющей силы тяжести, соответствующей этому радиусу:

$$-\frac{\partial U}{\partial r} = g \cos \varepsilon;$$

поскольку угол ε мал, произведение $g \cos \varepsilon$ почти равно единице, с точностью до некоторых величин второго порядка, и можно записать

$$\begin{aligned} g &= -\frac{\partial U}{\partial r}, \\ g &= \frac{M}{r^2} + 3\frac{C-A}{2}\frac{Y}{r^4} - \frac{2\omega^2 r}{3} - \frac{\omega^2 r Y}{3}. \end{aligned}$$

Положим теперь $r = 1 + \zeta$. Тогда

$$\frac{1}{r^2} = 1 - 2\zeta.$$

Отсюда находим

$$\begin{aligned}
 g &= M - 2M\zeta + \frac{3}{2}(C - A)Y - \frac{2\omega^2}{3} - \omega^2 Y, \\
 g &= M(1 - 2\zeta) + g_0\left(e_1 - \frac{\varphi}{2}\right)Y - \frac{2\omega^2}{3} - \frac{\omega^2 Y}{3}, \\
 g &= g_0\left(1 - \frac{2e_1 Y}{3}\right) + g_0\left(e_1 - \frac{\varphi}{2}\right)Y - \frac{2\varphi g_0}{3} - \frac{\varphi g_0 Y}{3}, \\
 \frac{g}{g_0} &= 1 + \frac{e_1 Y}{3} - \frac{5\varphi}{6}Y - \frac{2\varphi}{3} = 1 - \frac{2\varphi}{3} + \frac{Y}{3}\left(e_1 - \frac{5\varphi}{2}\right).
 \end{aligned}$$

Последнее выражение — это формула Клеро, представляющая силу тяжести в некоторой точке на поверхности планеты как функцию от широты этой точки [15].

Влияние высоты. Если наблюдатель поднимается на воздушном шаре, он легко может сделать поправку на высоту; нужно лишь заменить r в формуле на $1 + \zeta + h$ вместо $1 + \zeta$. Однако в этом случае нет нужды делать такую поправку. Чаще необходимость в поправке на высоту возникает, когда точка находится на некоторой возвышенности и необходимо учесть силу притяжения, связанную с этой возвышенностью.

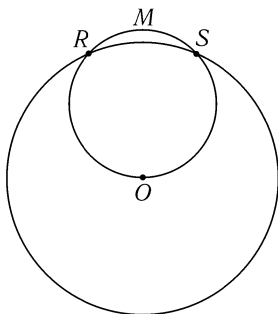


Рис. 15

Это значит, что нужно учесть неровности поверхности, положительные либо отрицательные, но прежде следует выбрать поверхность, определяющую общий уровень данной возвышенности. Такой поверхностью является сфера диаметра OM (рис. 15), где O — центр сфероиды, а M — точка, в которой производится наблюдение. Можно вычислить силу притяжения, связанную с объемом, заключенным между двумя сферами; погрешность будет не так уж и велика, тем более, что притяжение гор

очень мало. За плотность данного объема можно взять среднюю плотность горных пород у поверхности, т.е. $\frac{1}{2}D_1$, где D_1 — средняя плотность сфероиды.

Поправка Буге. Рассмотрим однородный сферический слой толщины h и плотности ρ . Объем этого слоя равен

$$4\pi r_1^2 h,$$

а его масса —

$$4\pi hr_1^2 \rho.$$

Поправка, вносимая в вычисление g , равна $4\pi\rho hr_1^2$ ¹ и имеет место равенство

$$\frac{\delta g}{g} = \frac{4\pi\rho h}{\frac{4}{3}\pi D_1 r_1} = \frac{3\rho h}{D_1 r_1}.$$

Построим конус, касательный к сфере, с вершиной в точке M , расположенной на некоторой высоте над слоем (рис. 16); линия касания разделит слой на две части, и нам известно, что силы притяжения каждой из этих частей, действующие на точку M , равны.

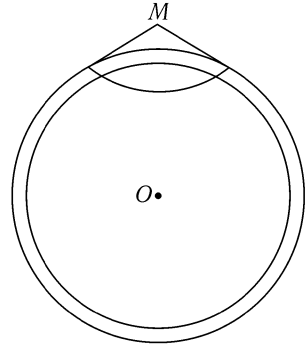


Рис. 16

Применим эту теорему. Ранее мы рассматривали сферу диаметра OM (рис. 15). Если теперь предположить, что сила притяжения объема MRS состоит из сил притяжения некоторого числа однородных тонких слоев, то часть объема этих слоев, ограниченная сферой (OM), будет оказывать на точку M такое же действие, что и половина объема всего слоя. Таким образом, чтобы вычислить силу притяжения, действующую на точку M , расположенную на высоте h , нужно вычислить силу притяжения окружающего сфероид слоя плотности ρ и толщины h , а затем разделить ее пополам.

Толщина h слоя может быть представлена в виде суммы

$$h = \sum \frac{AY}{r^n};$$

потенциал такого слоя, согласно известной формуле, составит

$$\sum \frac{4\pi AY}{(2n+1)r^{n+1}}.$$

Положим $r = 1$. Тогда приращение функции g имеет следующий вид:

$$\delta g = -\frac{\partial \delta V}{\partial r} = \sum 4AY\pi \frac{n+1}{2n+1},$$

¹ Должно быть $4\pi\rho h$.

и далее

$$\frac{\delta g}{g_0} = \frac{3\rho}{D_1} + \sum \frac{n+1}{2n+1} AY.$$

Ограничившись членом $n = 0$, получим

$$\frac{\delta g}{g_0} = \frac{3\rho}{D_1};$$

половина этого значения будет являться поправкой Буге.

Таким образом, полная поправка представляет собой сумму двух слагаемых: первое связано с увеличением высоты без учета массы возвышенности, во втором эта масса учитывается. Окончательная формула имеет вид

$$\frac{\delta g}{g_0} = -\frac{2h}{r_1} + \frac{3}{2} \frac{\rho h}{D_1 r_1}.$$

Вычисляя поправку по этой формуле, находим, что она чрезвычайно мала. В общем случае значение поправки, полученное из наблюдений, для точек, расположенных над материками, меньше вычисленного по формуле. И напротив, в точках, расположенных над океанами и отдельными островами, опытное значение поправки больше вычисленного.

Кроме того, как показал Фай, не стоит учитывать² поправку Буге для вычисления влияния масс, которые могут быть расположены под поверхностью океанов, или пустот, которые могут находиться под материками.

На поверхности океанов имеем $U = U_0$. Продолжая поверхность $U = U_0$ далее под материи, мы должны получить тело вращения, однако это не совсем так. Полученное таким образом тело называется геоидом.

Сила тяжести в точке, расположенной на поверхности геоида. Рассмотрим сферу радиуса, близкого радиусу Земли. Обозначив высоту материка, расположенного над поверхностью этой сферы, через ζ , можно записать

$$\zeta = \sum HY;$$

¹Величина, вычисляемая из последней формулы, учитывающей влияние и высоты, и внешних масс, в современной литературе называется не поправкой, а *редукцией* Буге.

²Поскольку поправка Буге при редуцировании на физическую поверхность Земли и так приводит к устранению промежуточного пласта вещества.

если ζ' — высота над соответствующим эллипсоидом, то

$$\zeta' = \sum (H - q)Y.$$

Расстояние между сферой и соответствующим эллипсоидом равно

$$\zeta - \zeta' = \sum qY.$$

Пусть h — высота точки над геоидом:

$$h = \sum kY.$$

Расстояние, на которое геоид возвышается над соответствующим эллипсоидом, равно

$$\zeta' - h = \sum (H - q - k)Y.$$

Значение $\zeta - \zeta'$ сводится к сумме двух членов: того, что соответствует $Y = 1$, и того, что соответствует $Y = \frac{x^2 + y^2 - 2z^2}{r^2}$.

На поверхности геоида имеем $U = g_0 = \text{const}$, а в точке, расположенной на высоте h ,

$$U = g_0 + \frac{\partial U}{\partial r}h.$$

Но

$$-\frac{\partial U}{\partial r} = g_0.$$

Отсюда

$$\frac{U}{g_0} = 1 + \sum (H - k)Y, \quad \frac{V}{g_0} = 1 + \sum (H - k - \gamma)Y.$$

Коэффициенты γ известны: они соответствуют коэффициентам, входящим в разложение функции

$$\frac{\omega^2}{2g_0}(x^2 + y^2).$$

Если допустить однородность тела, то

$$\frac{V}{g_0} = \frac{1}{r} + \frac{\sum (H - k - \gamma)Y}{r^{n+1}},$$

а поскольку

$$g = -\frac{\partial V}{\partial r},$$

в итоге получим

$$\frac{g}{g_0} = \frac{1}{r^2} + \frac{\sum (n+1)(H-k-\gamma)Y}{r^{n+2}}.$$

Величину h получаем из геодезических измерений, операция нивелирования дает величину ζ , а наблюдения маятника позволяют определить значение g . Теоретически, достаточно двух серий измерений для того, чтобы получить значения ζ , h и g . На деле же количество измерений каждой из этих величин никогда не бывает достаточным — эти измерения не настолько точны, чтобы какую-либо из серий можно было счесть излишней.

До сих пор мы допускали, что поверхность геоида мало отличается от поверхности эллипсоида вращения.

В дальнейшем мы покажем, что могут существовать фигуры равновесия, отличные от эллипсоида вращения.

ГЛАВА 6

ФУНКЦИИ ЛАМЭ

Эллиптические координаты. Рассмотрим софокусные поверхности второго порядка

$$\frac{x^2}{\lambda^2 - a^2} + \frac{y^2}{\lambda^2 - b^2} + \frac{z^2}{\lambda^2 - c^2} - 1 = 0.$$

Через любую точку пространства проходят три таких поверхности. В самом деле, если даны x, y, z , то λ^2 определяется из кубического уравнения, корни которого находятся между числами a^2, b^2 и c^2 .

Отсюда следует, что наибольший из этих корней (тот, что больше a^2) соответствует эллипсоиду, средний корень, заключенный между a^2 и b^2 , определяет однополостный гиперболоид, а третий корень, находящийся между b^2 и c^2 , соответствует гиперболоиду двуполостному.

Обозначим эти корни через ρ^2, μ^2, ν^2 и запишем

$$\rho^2 > a^2 > \mu^2 > b^2 > \nu^2 > c^2.$$

С другой стороны, если даны ρ, μ и ν , то имеются три поверхности, которые пересекаются в восьми точках, расположенных симметрично относительно координатных плоскостей.

Если ограничиться рассмотрением точек, расположенных в данном октанте, то каждая тройка чисел ρ, μ, ν определяет одну и только одну точку.

Можно записать

$$\frac{x^2}{\lambda^2 - a^2} + \frac{y^2}{\lambda^2 - b^2} + \frac{z^2}{\lambda^2 - c^2} - 1 = \frac{-(\lambda^2 - \rho^2)(\lambda^2 - \mu^2)(\lambda^2 - \nu^2)}{(\lambda^2 - a^2)(\lambda^2 - b^2)(\lambda^2 - c^2)}.$$

Умножив на $\lambda^2 - a^2$ и положив далее $\lambda^2 = a^2$, получим

$$x^2 = -\frac{(a^2 - \rho^2)(a^2 - \mu^2)(a^2 - \nu^2)}{(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)}.$$

Отсюда

$$x = \sqrt{\frac{(\rho^2 - a^2)(\mu^2 - a^2)(\nu^2 - a^2)}{(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)}};$$

то же для y и z :

$$y = \sqrt{\frac{(\rho^2 - b^2)(\mu^2 - b^2)(\nu^2 - b^2)}{(b^2 - a^2)(b^2 - c^2)}},$$

$$z = \sqrt{\frac{(\rho^2 - c^2)(\mu^2 - c^2)(\nu^2 - c^2)}{(c^2 - a^2)(c^2 - b^2)}}.$$

Знак, который следует поставить перед знаком корня, зависит от того, какой октант мы рассматриваем.

Возьмем некоторый полином $f(x)$ и положим

$$R = f(\rho^2), \quad M = f(\mu^2), \quad N = f(\nu^2).$$

Полином RMN будет в этом случае симметричным полиномом от трех величин ρ^2 , μ^2 , ν^2 , которые являются корнями уравнения

$$\frac{x^2}{\lambda^2 - a^2} + \frac{y^2}{\lambda^2 - b^2} + \frac{z^2}{\lambda^2 - c^2} = 1$$

и, следовательно, целой функцией от x^2 , y^2 , z^2 .

Положим

$$R = f(\rho^2)\sqrt{\rho^2 - a^2},$$

либо

$$R = f(\rho^2)\sqrt{(\rho^2 - a^2)(\rho^2 - b^2)},$$

либо

$$R = f(\rho^2)\sqrt{(\rho^2 - a^2)(\rho^2 - b^2)(\rho^2 - c^2)}$$

и запишем для M и N аналогичные функции от μ и ν . Тогда RMN — это полином в переменных x^2 , y^2 , z^2 , умноженный соответственно на x , xy либо xyz .

Предположим, что R — целый полином от ρ^2 ; мы можем разложить его на множители первого порядка и записать

$$R = \prod (\rho^2 - \lambda_1^2).$$

Тогда

$$\begin{aligned} RMN &= \prod (\rho^2 - \lambda_1^2)(\mu^2 - \lambda_1^2)(\nu^2 - \lambda_1^2) = \\ &= \prod \left[\frac{x^2}{\lambda_1^2 - a^2} + \frac{y^2}{\lambda_1^2 - b^2} + \frac{z^2}{\lambda_1^2 - c^2} - 1 \right]. \end{aligned} \quad (1)$$

Таким образом, RMN во всех случаях представляет собой произведение множителей вида (1), умноженных на некоторую комбинацию величин x, y, z .

Линейный элемент в эллиптических координатах. Поверхности $\rho = C^{\text{te}}$, $\mu = C^{\text{te}}$, $\nu = C^{\text{te}}$ образуют ортогональную систему координат, квадрат линейного элемента которой выражается следующим образом:

$$ds^2 = \alpha^2 d\rho^2 + \beta^2 d\mu^2 + \gamma^2 d\nu^2,$$

где α, β, γ — функции от ρ, μ, ν , которые мы определим позже. Имеем

$$\begin{aligned} ds^2 &= dx^2 + dy^2 + dz^2, \\ \frac{dx}{x} &= \frac{\rho d\rho}{\rho^2 - a^2} + \frac{\mu d\mu}{\mu^2 - a^2} + \frac{\nu d\nu}{\nu^2 - a^2}, \\ \frac{dy}{y} &= \frac{\rho d\rho}{\rho^2 - b^2} + \frac{\mu d\mu}{\mu^2 - b^2} + \frac{\nu d\nu}{\nu^2 - b^2}, \\ \frac{dz}{z} &= \frac{\rho d\rho}{\rho^2 - c^2} + \frac{\mu d\mu}{\mu^2 - c^2} + \frac{\nu d\nu}{\nu^2 - c^2}. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} dx^2 + dy^2 + dz^2 &= \rho^2 d\rho^2 \left[\frac{x^2}{(\rho^2 - a^2)^2} + \frac{y^2}{(\rho^2 - b^2)^2} + \frac{z^2}{(\rho^2 - c^2)^2} \right] + \\ &+ \mu^2 d\mu^2 \left[\frac{x^2}{(\mu^2 - a^2)^2} + \frac{y^2}{(\mu^2 - b^2)^2} + \frac{z^2}{(\mu^2 - c^2)^2} \right] + \\ &+ \nu^2 d\nu^2 \left[\frac{x^2}{(\nu^2 - a^2)^2} + \frac{y^2}{(\nu^2 - b^2)^2} + \frac{z^2}{(\nu^2 - c^2)^2} \right] \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$\frac{\alpha^2}{\rho^2} = \frac{(\mu^2 - \rho^2)(\nu^2 - \rho^2)}{(\rho^2 - a^2)(\rho^2 - b^2)(\rho^2 - c^2)}.$$

Положим

$$\begin{aligned} Q^2 &= (\mu^2 - \rho^2)(\rho^2 - \nu^2)(\nu^2 - \mu^2), \\ A^2 &= \frac{(\rho^2 - a^2)(\rho^2 - b^2)(\rho^2 - c^2)}{\rho^2}, \\ B^2 &= \frac{(\mu^2 - a^2)(\mu^2 - b^2)(\mu^2 - c^2)}{\mu^2}, \\ C^2 &= \frac{(\nu^2 - a^2)(\nu^2 - b^2)(\nu^2 - c^2)}{\nu^2}, \end{aligned}$$

где величины A^2 и C^2 — положительны, а B^2 — отрицательна, т.е. A и C являются вещественными числами, а B — мнимым.

В соответствии с принятыми обозначениями запишем

$$\alpha = \frac{Q}{A\sqrt{\mu^2 - \nu^2}}, \quad \beta = \frac{Q}{B\sqrt{\nu^2 - \rho^2}}, \quad \gamma = \frac{Q}{C\sqrt{\rho^2 - \mu^2}},$$

где $\sqrt{\nu^2 - \rho^2}$ — величина мнимая, значит β является вещественным числом.

Уравнение Лапласа. Рассмотрим, какой вид принимает уравнение Лапласа в эллиптических координатах. Ранее (стр. 43) мы уже установили, что если обозначить квадрат линейного элемента через

$$ds^2 = \alpha^2 d\rho^2 + \beta^2 d\mu^2 + \gamma^2 d\nu^2,$$

то

$$\Delta V = \frac{1}{\alpha\beta\gamma} \sum \frac{\partial}{\partial \rho} \left[\frac{\beta\gamma}{\alpha} \frac{\partial V}{\partial \rho} \right].$$

Из уравнения $\Delta V = 0$ получим

$$\sum \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{\beta\gamma}{\alpha} \frac{\partial V}{\partial \rho} \right) = 0.$$

Имеем

$$\frac{\beta\gamma}{\alpha} = \frac{AQ}{BC} \sqrt{\frac{\mu^2 - \nu^2}{(\nu^2 - \rho^2)(\rho^2 - \mu^2)}} = \frac{A\sqrt{-1}(\mu^2 - \nu^2)}{BC};$$

отсюда уравнение Лапласа выглядит следующим образом:

$$\sum \frac{\partial}{\partial \rho} \left[\frac{A}{BC} (\mu^2 - \nu^2) \frac{\partial V}{\partial \rho} \right] = 0.$$

Из величин в квадратных скобках, кроме $\frac{\partial V}{\partial \rho}$, только A зависит от ρ ; поэтому запишем

$$\sum \frac{\mu^2 - \nu^2}{BC} \cdot \frac{\partial}{\partial \rho} \left[A \frac{\partial V}{\partial \rho} \right].$$

Умножив на ABC , получим

$$\sum A(\mu^2 - \nu^2) \frac{\partial}{\partial \rho} \left[A \frac{\partial V}{\partial \rho} \right] = 0,$$

$$\sum \left[A^2 \frac{\partial^2 V}{\partial \rho^2} + A \frac{dA}{d\rho} \frac{\partial V}{\partial \rho} \right] (\mu^2 - \nu^2) = 0. \quad (2)$$

Коэффициенты в этом уравнении представляют собой вещественные числа, поскольку вещественны числа A^2 , B^2 , C^2 и, следовательно, их производные также существуют.

Функции Ламэ. Среди решений уравнения Лапласа есть полиномы вида RMN ; они называются функциями Ламэ¹.

Заметим прежде всего, что очевидно верны тождества

$$\begin{aligned} \sum (\mu^2 - \nu^2) &= 0, \\ \sum \rho^2 (\mu^2 - \nu^2) &= 0. \end{aligned}$$

Отсюда уравнение (2) эквивалентно следующему уравнению:

$$\sum \left[A^2 \frac{\partial^2 V}{\partial \rho^2} + A \frac{dA}{d\rho} \frac{\partial V}{\partial \rho} + H\rho^2 V + KV \right] (\mu^2 - \nu^2) = 0.$$

Допустим, что $V = RMN$ и что R удовлетворяет уравнению

$$A^2 \frac{\partial^2 R}{\partial \rho^2} + A \frac{dA}{d\rho} \frac{dR}{d\rho} + H\rho^2 R + KR = 0; \quad (3)$$

¹Полиномы вида RMN принято сейчас называть произведениями Ламэ, а функциями Ламэ — входящие в них сомножители.

тогда M и N удовлетворяют аналогичным уравнениям, а функция V в целом удовлетворяет уравнению Лапласа. Это достаточное условие является также и необходимым, т. е. если функция V имеет вид RMN и удовлетворяет уравнению Лапласа, то R удовлетворяет уравнению (3), а M и N удовлетворяют аналогичным уравнениям, полученным посредством замены ρ на μ и ν и замены A на B и C соответственно.

В самом деле, если положить $\mu = \nu$, то уравнение должно остаться справедливым. Функция R в этом случае сводится к M , а уравнение — к виду

$$B^2 \frac{\partial^2 M}{\partial \mu^2} + B \frac{dB}{d\mu} \frac{dM}{d\mu} + H\mu^2 M + KM = 0.$$

Существуют ли такие функции? Рассмотрим функцию $p(u)$, определяемую дифференциальным уравнением

$$p'u = 2\sqrt{(pu - e_1)(pu - e_2)(pu - e_3)},^1$$

где

$$e_1 + e_2 + e_3 = 0.$$

Положим

$$\rho^2 = pu + h, \quad a^2 = e_1 + h, \quad b^2 = e_2 + h, \quad c^2 = e_3 + h;$$

откуда

$$h = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}.$$

Таким образом,

$$p'u = 2\sqrt{(\rho^2 - a^2)(\rho^2 - b^2)(\rho^2 - c^2)} = 2A\rho.$$

Заметим, что

$$p'u \frac{du}{d\rho} = 2\rho;$$

значит,

$$A = \frac{d\rho}{du}$$

и, следовательно,

$$A \frac{dR}{d\rho} = \frac{dR}{d\rho} \frac{d\rho}{du} = \frac{dR}{du}.$$

¹Здесь Пуанкаре использует обозначения Вейерштрасса.

Уравнение

$$A \frac{d}{d\rho} \left[A \frac{dR}{d\rho} \right] + (H\rho^2 + K)R = 0$$

принимает вид

$$\frac{d^2 R}{du^2} + (H\rho^2 + K)R = 0.$$

Можно ли подобрать значения H и K таким образом, чтобы функция R являлась полиномом от ρ или подобным же полиномом, умноженным либо на $\sqrt{\rho^2 - a^2}$, либо на $\sqrt{\rho^2 - b^2}$, либо на $\sqrt{\rho^2 - c^2}$?

При замене ρ^2 на $p(u)$ такой полином будет представлять собой двоякопериодическую функцию, имеющую два периода $p(u)$: $2\omega_1$ и $2\omega_2$. Иначе говоря, существует удвоенное бесконечное количество полюсов функции $p(u)$, т. е. $u = 2m\omega_1 + 2n\omega_2$, где m и n — некоторые целые числа — положительные, отрицательные или равные нулю. Эти двойные полюса функции $p(u)$ будут для полинома полюсами порядка $2n$.

Кроме того, функция $\sqrt{\rho^2 - a^2} = \sqrt{pu - e_1}$ также является двоякопериодической с периодами $2\omega_1$ и $4\omega_2$ и в качестве простых полюсов имеет полюса функции $p(u)$. Следовательно, при прибавлении к u значений $2\omega_1$, $2\omega_2$ или $2\omega_3$ функция R сохраняет свое значение либо меняет знак в зависимости от того, сколько она содержит радикалов: ни одного, один или два, или от того, на сколько радикалов был умножен полином: на один, на два или на три.

Таким образом, функция R может быть четной либо нечетной, но в любом случае должно существовать разложение

$$R = \frac{a_0}{u^n} + \frac{a_1}{u^{n-2}} + \frac{a_2}{u^{n-4}} + \dots$$

Подставим это значение в полученное ранее уравнение, учитывая, что

$$p(u) = \frac{1}{u^2} + \alpha u^2 + \dots;$$

в результате уравнение примет вид

$$\begin{aligned} & \left[\frac{n(n+1)a_0}{u^{n+2}} + \frac{(n-1)(n-2)a_1}{u^n} + \dots \right] + \\ & + \left[H \left(\frac{1}{u^2} + \alpha u^2 + \dots \right) + K \right] \left[\frac{a_0}{u^n} + \frac{a_1}{u^{n-2}} + \dots \right] = 0. \end{aligned}$$

Для того чтобы это уравнение было справедливым, необходимо прежде всего сократить слагаемые, содержащие $\frac{1}{u^{n+2}}$, а это возможно, только если

$$H = -n(n+1).$$

Обозначив степень функции R через q , а количество радикалов, входящих в произведение, через p ($p = 1, 2$ или 3), можно записать

$$n = 2q + p.$$

Построение функций Ламэ. Итак, полиномы Ламэ, если они существуют, должны удовлетворять нижеследующим условиям.

Эти полиномы, рассматриваемые как функции от x, y, z , являются произведениями множителей второго порядка и одного или нескольких множителей x, y, z . Заменяя x, y, z их значениями, т.е. функциями от ρ^2, μ^2, ν^2 , получаем функцию вида RMN , где R представляет собой полином от ρ^2 , либо такой же полином, умноженный на один, два или три радикала

$$\sqrt{\rho^2 - a^2}, \quad \sqrt{\rho^2 - b^2}, \quad \sqrt{\rho^2 - c^2},$$

а M и N являются подобными функциями, где ρ заменяется на μ и ν .

Для функции Q существует восемь возможных форм, каждой из которых соответствует своя форма R . Если n — степень функции φ , то степень R от ρ^2 может быть

$$\frac{n}{2}, \quad \frac{n-1}{2}, \quad \frac{n-2}{2} \quad \text{или} \quad \frac{n-3}{2},$$

в зависимости от того, сколько радикалов содержит R — ни одного, один, два или три.

Наконец, заменив в функции R переменную ρ^2 на ρu , получим функцию, которая при замене u на $u + 2\omega_1$ меняет знак или остается неизменной в зависимости от четного или нечетного количества радикалов $\sqrt{\rho^2 - b^2}$ и $\sqrt{\rho^2 - c^2}$, поскольку радикал $\sqrt{\rho u - e_1}$ не изменяет знака функции при $u = u + 2\omega_1$.

Аналогично при увеличении u на величину $2\omega_2$ радикалы $\sqrt{\rho u - e_1}$ и $\sqrt{\rho u - e_3}$ меняют знак; следовательно, функция R меняет знак либо нет в зависимости от четного либо нечетного количества этих радикалов в своем составе.

Все эти выводы представлены в помещенной ниже таблице. Первая колонка содержит формы функции Q , вторая — соответствующие формы R , третья — степень полинома, которая входит в R как функция от степени Q . Четвертая и пятая указывают, изменит ли функция знак при увеличении значения u на период $2\omega_1$ и $2\omega_2$ соответственно. Функция Q_1 представляет собой исключительно произведение множителей второго порядка.

Q_1	R не содержит радикалов	$\frac{n}{2}$	+	+	$\frac{n+2}{2}$
Q_1x	R содержит $\sqrt{\rho^2 - a^2}$	$\frac{n-1}{2}$	+	—	$\frac{n}{2}$
Q_1y	... $\sqrt{\rho^2 - b^2}$...	—	+	...
Q_1z	... $\sqrt{\rho^2 - c^2}$...	—	—	...
Q_1yz	... $\sqrt{\rho^2 - b^2}\sqrt{\rho^2 - c^2}$	$\frac{n-2}{2}$	+	—	$\frac{n+1}{2}$
Q_1zx	... $\sqrt{\rho^2 - c^2}\sqrt{\rho^2 - a^2}$...	—	+	...
Q_1xy	... $\sqrt{\rho^2 - a^2}\sqrt{\rho^2 - b^2}$...	—	—	...
Q_1xyz	... $\sqrt{(\rho^2 - a^2)(\rho^2 - b^2)(\rho^2 - c^2)}$	$\frac{n-3}{2}$	+	+	$\frac{n-1}{2}$

Отыскание K . Принимая во внимание вышеизложенное, попытаемся отыскать K . Для функций первого типа R — полином степени $\frac{n}{2}$, содержащий $\frac{n}{2} + 1$ однородных коэффициентов.

Подставив его в дифференциальное уравнение, получим полином степени $\frac{n}{2} + 1$, который должен быть равен нулю. Так как, согласно нашему предположению, $H = -n(n+1)$, коэффициент при члене наибольшего порядка сокращается. Значит, нужно сократить еще $\frac{n}{2} + 1$ коэффициентов.

Таким образом, $\frac{n}{2} + 1$ коэффициентов полинома должны удовлетворять такому же количеству линейных однородных уравнений, коэффициенты которых линейно зависят от K . После сокращения коэффициентов полинома получим для K уравнение степени $\frac{n}{2} + 1$.

Если R относится ко второму типу, необходимо определить $\frac{n+1}{2}$ коэффициентов полинома степени $\frac{n-1}{2}$. Значит, согласно рассужде-

нию, аналогичному приведенному выше, порядок уравнения для K равен $\frac{n+1}{2}$.

В случае функции R третьего типа уравнение для K имеет порядок $\frac{n}{2}$, а если R относится к четвертому типу, то порядок уравнения для K — $\frac{n-1}{2}$.

Эти выводы составляют шестую колонку вышеприведенной таблицы.

Из сказанного следует, что каждому корню уравнений для K , полученных таким образом, соответствует один и только один полином.

Если n четно, то существуют только полиномы первого и третьего типов; их количество равно

$$\frac{n}{2} + 1 + 3\frac{n}{2} = 2n + 1.$$

Если n нечетно, то существуют только полиномы второго и четвертого типов; их общее количество равно

$$\frac{n-1}{2} + 3\frac{n+1}{2} = 2n + 1.$$

Следовательно, имеется не более $2n + 1$ полиномов Ламэ. Я говорю «не более», потому что уравнения для K могли бы иметь кратные корни, однако позже мы увидим, что ничего подобного не происходит.

Связь со сферическими функциями. Предположим, что x , y , z являются бесконечными величинами первого порядка; μ и ν остаются, по своей сути, конечными, однако ρ также становится бесконечной величиной первого порядка.

Однородная совокупность членов наибольшего порядка в функции Ламэ, разумеется, удовлетворяет уравнению Лапласа. Значит, она представляет собой сферический полином, который можно записать как $H(x, y, z)$. Член наибольшего порядка в полиноме RMN от ρ запишется как $\alpha\rho^m MN$.

Перейдем к полярным координатам

$$x = r \sin \theta \cos \varphi, \quad y = r \sin \theta \sin \varphi, \quad z = r \cos \theta.$$

Если величина ρ достаточно велика, то она мало отличается от r , переменные же μ и ν , напротив, зависят от φ и θ .

В самом деле, уравнение, определяющее μ , может быть записано следующим образом:

$$\frac{x^2}{\mu^2 - a^2} + \frac{y^2}{\mu^2 - b^2} + \frac{z^2}{\mu^2 - c^2} - 1 = 0.$$

Если x, y, z достаточно велики, то единицей можно пренебречь. В результате остается уравнение второго порядка; его корнями являются конечные величины μ и ν , которые зависят только от отношений $\frac{y}{x}$ и $\frac{z}{x}$ соответственно, т. е. от φ и θ .

Следовательно, можно записать

$$r^n H(\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta) = \alpha \rho^n MN$$

или, поскольку $r = \rho$,

$$H(\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta) = \alpha MN;$$

следовательно, произведение MN является сферической функцией, а полином H может быть представлен как произведение множителей второго порядка¹. Как доказал Мутар, это единственный случай, когда сферический полином может быть разложен в произведение квадратичных и линейных множителей.

Полином MN , рассматриваемый как функция от θ и φ , является, таким образом, сферической функцией и, поскольку любая функция может быть представлена в виде суммы сферических функций, любая функция от μ и ν может быть представлена в виде суммы

$$\sum \alpha MN.$$

Сходство между сферическими функциями и функциями Ламэ проявится еще больше, когда мы рассмотрим случай софокусных поверхностей вращения.

Эллипсоиды вращения. Рассмотрим два частных случая софокусных поверхностей второго порядка: $a = b$ и $b = c$.

В случае $a = b$ имеем сжатые эллипсоиды вращения при $\lambda^2 > a^2$ и двуполостные гиперболоиды при $a^2 > \lambda^2 > c^2$. Однополостные гиперболоиды вырождаются в плоскости, проходящие через ось Oz .

¹См. Journal de Liouville, т. XI, 1846, стр. 278. — *Прим. автора.*

В случае $b = c$ имеем вытянутые эллипсоиды вращения вокруг оси Ox при $\lambda^2 > a^2$ и однополостные гиперboloиды при $a^2 > \lambda^2 > b^2$. Двуполостные гиперboloиды вырождаются в плоскости, проходящие через ось Ox .

В обоих этих случаях ни μ , ни ν не могут служить параметрами; необходимо выбрать в качестве параметра угол между рассматриваемой плоскостью и некоторой фиксированной плоскостью, например, плоскостью xOz для наших случаев. Имеет место равенство

$$\frac{y}{x} = \sqrt{\frac{(\rho^2 - b^2)(\mu^2 - b^2)(b^2 - \nu^2)}{(\rho^2 - a^2)(a^2 - \mu^2)(a^2 - \nu^2)}} \sqrt{\frac{a^2 - c^2}{b^2 - c^2}}.$$

Если b стремится к a , то μ также стремится к a , и очевидно, что

$$\frac{y}{x} = \lim \sqrt{\frac{\mu^2 - b^2}{a^2 - \mu^2}}.$$

Обозначив угол между плоскостью, проходящей через точку (x, y, z) и ось Oz , и плоскостью xOz через φ , можно увидеть, что μ является функцией от φ :

$$\mu^2 = a^2 \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi.$$

Очевидно, что

$$\begin{aligned} \lim \sqrt{\frac{a^2 - \mu^2}{a^2 - b^2}} &= \sin \varphi, \\ \lim \sqrt{\frac{b^2 - \mu^2}{a^2 - b^2}} &= \cos \varphi.^1 \end{aligned}$$

При таких же условиях можно записать уравнение, определяющее ν , следующим образом:

$$\frac{x^2 + y^2}{\nu^2 - a^2} + \frac{z^2}{\nu^2 - c^2} = 0,$$

¹ Должно быть $\lim_{a \rightarrow b} \sqrt{\frac{\mu^2 - b^2}{a^2 - b^2}} = \cos \varphi$.

за вычетом единицы, которая пренебрежимо мала по сравнению с x , y и z .

Переведа равенство в полярные координаты, получим

$$\frac{r^2 \sin^2 \theta}{\nu^2 - a^2} + \frac{r^2 \cos^2 \theta}{\nu^2 - c^2} = 0;$$

и далее

$$\sin \theta = \sqrt{\frac{a^2 - \nu^2}{a^2 - c^2}}, \quad \cos \theta = \sqrt{\frac{\nu^2 - c^2}{a^2 - c^2}}.$$

Теперь мы можем приступить к построению функций Ламэ.

Известно, что MN является сферической функцией; M не зависит от φ , N не зависит от θ , и таким образом, MN — одна из фундаментальных сферических функций, рассмотренных выше (стр. 45).

Следовательно, $M = \cos p\varphi$ или $\sin p\varphi$, а для N , положив

$$F_n^p(\cos \theta) = F_n^p \left[\sqrt{\frac{\nu^2 - c^2}{a^2 - c^2}} \right],$$

можно записать

$$F_n^p(t) = (1 - t^2)^{\frac{p}{2}} \frac{d^{n+p}(1 - t^2)^n}{dt^p}.$$

Нули функции N , не считая значений ± 1 , можно определить, вычислив нули функции F_n^p . Все эти значения вещественны и различны, поскольку, как явствует из теоремы Ролля, нули функции F_n^p располагаются между нулями функции F_n^{p-1} . Имеем

$$(1 - t^2)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{a^2 - \nu^2}{a^2 - b^2}}.$$

Следовательно, если число p четное, то функция F_n^p не меняет своего знака вместе с $\sin \theta$; и наоборот, если число p нечетное, то знак функции F_n^p меняется при смене знака $\sin \theta$.

Заменяем переменные x , y , z их выражениями в полярных координатах. Тогда функция Q будет менять свой знак, если она содержит один из множителей x или y . Если же она содержит два таких множителя или не содержит их совсем, то ее знак не изменится. В первом случае значение p будет четным, а во втором — нечетным.

Заметим также, что y и $\sin p\varphi$ изменяют знак одновременно. Следовательно, если функция Q содержит множитель y , то функцию M следует брать равной $\sin p\varphi$, в противном случае функцию M следует брать равной $\cos p\varphi$.

Аналогично, если $b^2 = c^2$, то мы переходим к следующим полярным координатам:

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta \cos \varphi, \quad z = r \sin \theta \sin \varphi.$$

В этом случае, $N = \sin p\varphi$ или $\cos p\varphi$, а $M = F_n^p(\cos \theta)$.

Число p будет нечетным, если Q содержит один из множителей y или z , и четным, если Q содержит оба эти множителя либо ни одного из них. Для функции N выбираем $\sin p\varphi$ или $\cos p\varphi$ в зависимости от того, содержит ли Q множитель z .

Резюме. Выводы данного обсуждения представлены в нижеследующей таблице. Первая колонка содержит восемь возможных видов функции Q , вторая — соответствующие формы R . Третья и четвертая колонки относятся к случаю $a^2 = b^2$ — в третьей стоит 0, если p четное, и 1, если p нечетное, а в четвертой указано, сводится функция M к $\cos p\varphi$ или $\sin p\varphi$. Пятая и шестая колонки содержат соответствующие данные для случая $b^2 = c^2$.

		$a^2 = b^2$		$b^2 = c^2$	
P	R	0	\cos	0	\cos
$P \times x$	$R\sqrt{\rho^2 - a^2}$	1	\cos	0	\cos
$P \times y$	$R\sqrt{\rho^2 - b^2}$	1	\sin	1	\cos
$P \times z$	$R\sqrt{\rho^2 - c^2}$	0	\cos	1	\sin
$P \times zy$	$R\sqrt{(\rho^2 - b^2)(\rho^2 - c^2)}$	1	\sin	0	\sin
$P \times zx$	$R\sqrt{(\rho^2 - c^2)(\rho^2 - a^2)}$	1	\cos	1	\sin
$P \times xy$	$R\sqrt{(\rho^2 - a^2)(\rho^2 - b^2)}$	0	\sin	1	\cos
$P \times xyz$	$R\sqrt{(\rho^2 - a^2)(\rho^2 - b^2)(\rho^2 - c^2)}$	0	\sin	0	\sin

Вещественность значений K . Докажем теперь, что все корни уравнений для K вещественны.

Для того чтобы найти значения K , допустим сначала, что $a^2 = b^2$. Положим $\mu^2 = a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi$, поскольку значение μ заключено в интервале от a до b и равно M при $a = b$. Приняв φ за переменную, уравнение, определяющее μ ,

$$B \frac{d}{d\mu} \left(B \frac{dM}{d\mu} \right) - [n(n+1)\mu^2 - K]M = 0$$

можно записать как

$$\begin{aligned} \sqrt{\mu^2 - c^2} \frac{d}{d\varphi} \left[\sqrt{\mu^2 - c^2} \frac{dM}{d\varphi} \right] - [n(n+1)\mu^2 - K]M &= 0, \\ (\mu^2 - c^2) \frac{d^2 M}{d\varphi^2} + (b^2 - a^2) \sin \varphi \cos \varphi \frac{dM}{d\varphi} - [n(n+1)\mu^2 - K]M &= 0. \end{aligned}$$

При $a^2 = b^2$ получим уравнение

$$(a^2 - c^2) \frac{d^2 M}{d\varphi^2} - [n(n+1)\mu^2 - K]M = 0.$$

Решениями этого уравнения должны быть $\cos p\varphi$ и $\sin p\varphi$, следовательно,

$$\frac{K - n(n+1)}{a^2 - c^2} = p^2.$$

Таким образом, уравнение для K имеет $n+1$ вещественных корней, соответствующих значениям p

$$0, 1, 2, \dots, (n-1), n.$$

Очевидно, что все корни уравнений для K вещественны, а четные значения p располагаются между нечетными.

При изменении b в интервале от a до c корни уравнений, соответствующие двум группам функций Ламэ, содержащих ни одного либо два радикала, будут располагаться между корнями, соответствующими двум другим группам функций, содержащих один либо три радикала. Это правило может быть нарушено только в том случае, когда какой-либо из корней φ одной группы уравнений станет равен какому-либо из корней другой группы.

Пусть K — такой корень, а R и S — соответствующие функции Ламэ, принадлежащие, согласно нашему предположению, к двум различным группам. Имеем

$$R'' - (H\rho^2 + K)R = 0, \quad S'' - (H\rho^2 + K)S = 0,$$

откуда

$$R''S - S''R = 0.$$

Непосредственно интегрируя, запишем

$$R'S - S'R = \alpha.$$

Предположим, что функции R и S выражены в эллиптических функциях от параметра u . Тогда можно увеличить u на 2ω , $2\omega_2$ или $2\omega_3$ так, чтобы функция R , например, не изменила своего значения, а функция S изменила бы знак; то же относится к R' и S' . Но тогда разность произведений $R'S - S'R$ изменит знак; следовательно, $\alpha = 0$. Отсюда заключаем, что $\frac{R}{S}$ — величина постоянная, что, разумеется, неверно.

Таким образом, два уравнения для K , соответствующие одному значению n , не могут иметь общего корня.

Заметим, что коэффициент при члене наибольшего порядка в уравнении для K сводится к единице; следовательно, понижение степени уравнения невозможно.

Линейная независимость функций Ламэ. Докажем теперь, что между p функциями Ламэ одинакового вида для данного значения n не существует линейного соотношения с постоянными коэффициентами (p — одно из чисел $\frac{n}{2} + 1, \frac{n-1}{2}, \frac{n+1}{2}, \frac{n}{2}$).

В самом деле, допустим, что такое соотношение существует и имеет вид

$$R_{q+1} = \alpha_1 R_1 + \alpha_2 R_2 + \dots + \alpha_q R_q, \quad q < p.$$

После подстановки R_{q+1} в уравнение второго порядка p коэффициентов полинома обращаются в нуль. Отсюда для определения коэффициентов $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_q$ получаем $p+1$ уравнений первого порядка, из которых первое выполняется тождественно. В результате имеем p однородных уравнений с q неизвестными. Сокращение неизвестных даст в итоге некоторое количество уравнений для K порядка не больше q , причем эти уравнения должны выполняться для p значений K , т. е. эти

уравнения сводятся, таким образом, к тождествам. Следовательно, при любом K можно определить коэффициенты $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_q$. Иными словами, в качестве решения уравнения Ламэ при любом K имеем некоторый полином, а это утверждение противоречиво.

Вещественность корней полиномов Ламэ. Докажем, что корни любого полинома R вещественны и заключены между a^2 и c^2 .

Разделим интервал от $-\infty$ до $+\infty$ на четыре отрезка числами a^2, b^2 и c^2 .

Сначала докажем, что число корней, заключенных в каждом из отрезков, остается постоянным при уменьшении величины b^2 от a^2 до c^2 . В самом деле, иная ситуация может возникнуть, только если оба вещественных корня станут мнимыми при некотором значении b . Но тогда при данном b полином будет иметь двойной корень, а R' обратится в нуль. Имеем

$$R'' = FR = 0,$$

где $F = H^2\rho + K$; также

$$R''' = FR' + F'R, \quad R^{IV} = FR'' + 2F'R' + F''R \text{ и т. д.};$$

все производные обращаются в нуль, а это невозможно.

Кроме того, может случиться так, что один из корней окажется равным a^2, b^2 или c^2 . Предположим, например, что один из корней равен a^2 . Так как мы положили

$$pu - e_1 = \rho^2 - a^2,$$

соответствующее значение u будет равно ω_1 . Известно, что $p'\omega_1 = 0$, а ω_1 является нулем функции $p'\omega_2$. Отсюда ω_1 будет нулем производной R' , и мы возвращаемся к предыдущему случаю.

Положим, что ε_1 — число мнимых корней совокупности полиномов, соответствующих некоторому значению n ; ε_2 — число вещественных корней, заключенных в интервале от a^2 до b^2 ; ε_3 — число вещественных корней, заключенных в интервале от b^2 до c^2 ; ε_4 — число вещественных корней, не входящих в интервал от a^2 до c^2 .

Общее число корней равно сумме степеней полиномов

$$\frac{n}{2} \left(\frac{n}{2} + 1 \right) = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4.$$

Если $b^2 = a^2$, все корни ε_2 сводятся к a^2 , а корни ε'_3 сводятся к a^2 или c^2 ; если же $b^2 = c^2$, все корни ε_3 сводятся к c^2 , а корни ε'_2 сводятся к a^2 или c^2 .

Однако при $a^2 = b^2$ полиномы представляют собой последовательные производные от $(\nu^2 - 1)^n$, и все их корни вещественны. Один из полиномов имеет 0 корней, один — один корень, один — два корня и т. д., последний полином имеет $\frac{n}{2}$ корней, не считая корней ± 1 . Отсюда

$$\varepsilon_3 = \frac{n}{4} \left(\frac{n}{2} + 1 \right) + \varepsilon'_3;$$

аналогично

$$\varepsilon_2 = \frac{n}{4} \left(\frac{n}{2} + 1 \right) + \varepsilon'_2.$$

Таким образом, верно равенство

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4 = \frac{n}{2} \left(\frac{n}{2} + 1 \right) + \varepsilon_1 + \varepsilon_4 + \varepsilon'_2 + \varepsilon'_3,$$

из которого заключаем, что

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_4 + \varepsilon'_2 + \varepsilon'_3 = 0$$

и, следовательно,

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon'_3 = \varepsilon'_4 = 0.$$

Теорема доказана.

Для того чтобы найти количество корней, содержащихся в интервалах $a^2 \dots b^2$ и $b^2 \dots c^2$, заметим, что в общем случае оно совпадает с их количеством в частном случае, когда $a^2 = b^2$.

Заметим также, что существует полином, содержащий 0 корней в интервале от a^2 до b^2 , и $\frac{n}{2}$ корней в интервале от b^2 до c^2 ; полином, содержащий 1 корень в интервале от a^2 до b^2 и $\frac{n}{2} - 1$ корней в интервале от b^2 до c^2 ; и полином, содержащий $\frac{n}{2}$ корней в интервале от a^2 до b^2 и 0 корней в интервале от b^2 до c^2 .

Разложение функции в сумму функций Ламэ. Рассмотрим эллипсоид, принадлежащий семейству поверхностей, задаваемому параметром ρ . Если положить

$$l = \frac{1}{\sqrt{(\rho^2 - \mu^2)(\rho^2 - \nu^2)}},$$

получим

$$\int lMN \cdot M_1N_1 d\sigma = 0,$$

где MN — одно из уже рассмотренных произведений, M_1N_1 — еще одно из таких произведений, а интеграл берется по всей поверхности эллипсоида.

Пусть

$$V = RMN, \quad V_1 = R_1M_1N_1.$$

Поскольку $\Delta V = 0$, из формулы Грина получим

$$\int \left(V \frac{dV_1}{dn} - V_1 \frac{dV}{dn} \right) d\sigma = 0;$$

интеграл берется по какой-либо замкнутой поверхности. Предположим, что эта поверхность является эллипсоидом. Тогда R и R_1 — постоянны. Вычислим $\frac{dV}{dn}$ и $\frac{dV_1}{dn}$: при сдвиге вдоль нормали к поверхности эллипсоида μ и ν остаются постоянными, а ρ увеличивается на $d\rho$. Имеем

$$\frac{dV}{dn} = \frac{\partial V}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial n} = \frac{\partial V}{\partial u} \frac{du}{d\rho} \frac{d\rho}{dn} = \frac{\partial V}{\partial u} \frac{du}{dn};$$

однако известно, что

$$\frac{\partial V}{\partial u} = MN \frac{dR}{du};$$

следовательно, интеграл запишется как

$$\int MN \cdot M_1N_1 (RR'_1 - R_1R') \frac{du}{dn} d\sigma = 0.$$

Но $RR'_1 - R_1R'$ зависит только от ρ и, поскольку значение этой разности представляет собой постоянную величину, можно вывести ее из-под знака корня. Впрочем,

$$RR'_1 - R_1R' \neq 0;$$

поменяв знак, получим

$$\int -MN M_1N_1 \frac{du}{dn} d\sigma = 0.$$

Теперь нам следует отыскать

$$-\frac{du}{dn} = -\frac{du}{d\rho} \frac{d\rho}{dn}.$$

Положив $\rho^2 = \rho u + h$, можно записать

$$\rho \frac{d\rho}{du} = \pm \sqrt{(\rho^2 - a^2)(\rho^2 - b^2)(\rho^2 - c^2)},$$

откуда

$$\frac{d\rho}{du} = \pm A.$$

Когда ρ стремится к бесконечности, ρu также стремится к ∞ , а u стремится к 0, т.е. уменьшается. Значит, следует оставить перед A знак минус.

Поскольку квадрат линейного элемента имеет вид

$$ds^2 = \alpha^2 d\rho^2 + \beta^2 d\mu^2 + \gamma^2 d\nu^2,$$

а значение ρ изменяется только на нормали, запишем

$$\frac{d\rho}{dn} = \frac{1}{\alpha} = \frac{A\sqrt{\mu^2 - \nu^2}}{Q}.$$

Положив

$$l = -\frac{du}{dn},$$

получим

$$l = -\frac{\sqrt{\mu^2 - \nu^2}}{Q} = -\frac{1}{\sqrt{(\rho^2 - \mu^2)(\rho^2 - \nu^2)}}, \quad [16]$$

что и было приведено в начале данного раздела. Интеграл, впрочем, не зависит от ρ , поскольку

$$d\sigma = \beta\gamma d\mu d\nu;$$

и, как следствие,

$$l d\sigma = \frac{Q^2 \sqrt{-1} d\mu d\nu}{BC \sqrt{(\rho^2 - \mu^2)(\rho^2 - \nu^2)}} = \frac{(\mu^2 - \nu^2) \sqrt{-1} d\mu d\nu}{BC}.$$

Докажем, что любая функция, определенная на поверхности эллипсоида, может быть представлена в виде суммы функций Ламэ:

$$\Phi = \sum A_k M_k N_k.$$

Предыдущая теорема позволяет легко найти коэффициенты разложения. Имеем

$$\int l \Phi M_k N_k d\sigma = \int \sum A_k l M_k N_k M_i N_i d\sigma;$$

правая часть равенства сводится к $A_k \int l M_k^2 N_k^2 d\sigma$, это выражение и определяет A_k .

Функции S . Рассмотрим еще одну функцию от ρ , также удовлетворяющую уравнению Ламэ, и определим ее нижеследующим образом.

Пусть R — функция Ламэ степени n , задаваемая отношением

$$R'' + FR = 0;$$

функция S , связанная с функцией R , задается отношением

$$S'' + FS = 0,$$

где F имеет то же значение. Отсюда заключаем, что

$$S''R - R''S = 0.$$

Интегрируя это выражение, получим

$$S'R - R'S = C^{\text{те}}.$$

Произвольно выберем константу равной $2n + 1$. Тогда

$$\frac{S'R - R'S}{R^2} = \frac{2n + 1}{R^2}.$$

Отсюда

$$\frac{S}{R} = \int \frac{2n + 1}{R^2} du.$$

Нижний предел интегрирования также можно выбирать произвольно. Допустим, что

$$\frac{S}{R} = \int_0^u \frac{2n+1}{R^2} du.$$

Для очень большого значения ρ^2 имеем

$$R = A\rho^n,$$

где A — некоторая константа, которую можно принять равной единице. Значение u в этом случае очень мало, так как

$$\rho^2 = pu.$$

Величина ρ^2 приблизительно равна $\frac{1}{u^2}$, а величина ρ — $\frac{1}{u}$.

Таким образом,

$$R = u^{-n}, \quad S = u^{-n} \int_0^u \frac{2n+1}{u^{-2n}} du = u^{n+1};$$

следовательно, функция S приблизительно равна $u^{n+1} = \frac{1}{r^{n+1}}$; произведение SMN также удовлетворяет уравнению Лапласа.

ГЛАВА 7

ПРИТЯЖЕНИЕ ЭЛЛИПСОИДОВ

ФИГУРЫ РАВНОВЕСИЯ

Проблема Дирихле для эллипсоида. Рассмотрим теперь проблему Дирихле для эллипсоида, в рамках которой на поверхности эллипсоида, определяемого параметром ρ_0 , даны значения некоторой функции V ; требуется найти функцию V , которая бы удовлетворяла уравнению Лапласа и принимала на поверхности эллипсоида данные значения.

Пусть на поверхности эллипсоида

$$V = \Phi = \sum A_i M_i N_i.$$

Положим

$$A_i = \alpha_i R_i^0 S_i^0,$$

где R_i^0 — значение при $\rho = \rho_0$ функции R_i , а S_i^0 — значение при $\rho = \rho_0$ функции S_i .

Тогда

$$\Phi = \sum \alpha_i R_i^0 S_i^0 M_i N_i.$$

Теперь рассмотрим функцию, задаваемую выражением

$$\sum \alpha S^0 R M N$$

внутри эллипсоида и выражением

$$\sum \alpha R^0 S M N$$

снаружи того же эллипсоида.

Эти два ряда сходятся в указанных промежутках, и, следовательно, функция полностью определена.

Найдем значения величин

$$\frac{\partial V}{\partial n_e} \quad \text{и} \quad \frac{\partial V}{\partial n_i}.$$

Имеем

$$\frac{\partial V}{\partial n_i} = \sum \alpha_i R_i^0 S_i' M_i N_i \cdot \frac{du}{dn} = -l \sum \alpha_i R_i^0 S_i'^0 M_i N_i.$$

В то же время

$$\frac{\partial V}{\partial n_e} = -l \sum \alpha_i S_i^0 R_i'^0 M_i N_i.$$

Функция V остается непрерывной при пересечении с поверхностью, но ее производные терпят разрыв. Таким образом, V представляет собой потенциал, создаваемый распределенной по поверхности массой, плотность которой δ определяется соотношением

$$\frac{\partial V}{\partial n_e} - \frac{\partial V}{\partial n_i} = -4\pi\delta.$$

Вместо того чтобы предполагать переменную плотность, можно предположить, что распределение плотности равно единице, а изменяется толщина слоя, причем изменяется согласно отношению

$$\frac{\partial V}{\partial n_e} - \frac{\partial V}{\partial n_i} = -4\pi\zeta;$$

это уравнение полностью определяет ζ , поскольку

$$4\pi\zeta = -l \sum \alpha_i (R_i^0 S_i'^0 - R_i'^0 S_i^0) M_i N_i = l \sum \alpha (2n+1) M N.$$

Если толщина слоя определяется функцией вида

$$\sum l\beta M N,$$

то потенциал на поверхности эллипсоида определяется из формулы

$$\sum \frac{\beta}{2n+1} M N,$$

откуда легко вывести выражения для потенциала внутри и снаружи поверхности.

Применение. Рассмотрим простейшие функции Ламэ.

1. При $n = 0$ имеем

$$R_0 = M_0 = N_0 = 1, \quad S = u.$$

2. При $n = 1$ имеем три функции R :

$$R_1 = \sqrt{\rho^2 - a^2}, \quad R_2 = \sqrt{\rho^2 - b^2}, \quad R_3 = \sqrt{\rho^2 - c^2}.$$

Положив

$$h_1 = \frac{1}{\sqrt{(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)}},$$

$$h_2 = \frac{1}{\sqrt{(b^2 - c^2)(b^2 - a^2)}},$$

$$h_3 = \frac{1}{\sqrt{(c^2 - a^2)(c^2 - b^2)}},$$

получим¹

$$x = h_1 R_1 M_1 N_1, \quad y = h_2 R_2 M_2 N_2, \quad z = h_3 R_3 M_3 N_3.$$

3. При $n = 2$ имеем, прежде всего, два полинома второй степени:

$$\rho^2 - h^2$$

и

$$\rho^2 - h'^2,$$

которые можно легко вычислить. Известно, что

$$a^2 > h^2 > b^2 > h'^2 > c^2;$$

откуда получим три функции:

$$R_4 = \sqrt{(\rho^2 - b^2)(\rho^2 - c^2)},$$

$$R_5 = \sqrt{(\rho^2 - c^2)(\rho^2 - a^2)},$$

$$R_6 = \sqrt{(\rho^2 - a^2)(\rho^2 - b^2)}.$$

¹Таким образом, совершается переход от эллиптических координат к декартовым.

Имеем

$$R_4 = R_2 R_3, \quad R_5 = R_1 R_3, \quad R_6 = R_1 R_2;$$

из них следует, что $yz = h_2 h_3 R_4 M_4 N_4$, $zx = h_3 h_1 R_5 M_5 N_5$, а $xy = h_1 h_2 R_6 M_6 N_6$.

Отметим еще значение функций R_1, R_2, R_3 , которые являются полуосями эллипсоида, определяемого параметром ρ . Его объем равен

$$T = \frac{4}{3}\pi R_1 R_2 R_3 = \frac{4}{3}\pi R_1 R_4.$$

Предположим, что на поверхности эллипсоида имеется тонкий слой постоянной плотности и толщины

$$\zeta = M_0 N_0;$$

потенциал на поверхности в этом случае равен

$$V = 4\pi R_0^0 S_0^0 M_0 N_0 = 4\pi u_0;$$

нижние индексы здесь указывают порядок функции Ламэ, а верхний — то, что ρ берется равным ρ_0 . Потенциал внутри поверхности равен

$$4\pi S_0^0 R_0 M_0 N_0 = 4\pi u_0,$$

т.е. потенциал остается постоянным. Следовательно, распределение вещества будет таким же, как равновесное распределение электрических зарядов на поверхности проводящего эллипсоида.

Потенциал снаружи поверхности равен

$$4\pi R_0^0 S_0 M_0 N_0 = 4\pi u.$$

Таким образом, эквипотенциальные поверхности являются поверхностями, где $u = C^{\text{те}}$, или поверхностями постоянного ρ , т.е. софокусными эллипсоидами.

Соответствующий тонкий слой — это слой, заключенный между двумя софокусными эллипсоидами, расстояние между которыми равно ζ .

Притяжение однородного эллипсоида. Возьмем однородный эллипсоид, потенциал которого равен V (рис. 17), и сместим его на величину ε параллельно оси Ox . Потенциал в точке (x, y, z) примет вид

$$V'(x - \varepsilon, y, z) = V(x, y, z) - \varepsilon \frac{\partial V}{\partial x},$$

а эллипсоид займет положение E' . Разность потенциалов обусловлена тем, что добавлена заштрихованная область справа, и отнята заштрихованная область слева. Можно предположить, что эта разность представляет собой потенциал некоторого слоя толщины ζ , распределенного по поверхности эллипсоида, где величина ζ положительна справа и отрицательна слева.

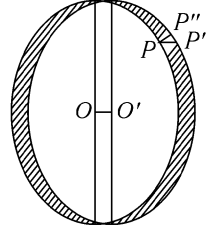


Рис. 17

Вычислим значение ζ . Пусть PP'' — нормаль, общая для обоих эллипсоидов, т. е. $\zeta = PP''$, $PP' = \varepsilon$, а $PP'P''$ — прямоугольный треугольник с прямым углом в вершине P'' . Отсюда,

$$PP'' = \varepsilon \cos(PP', PP'').$$

Поскольку $PP'' \cos(PP', PP'')$ является проекцией PP'' на ось Ox и PP'' есть нормаль к эллипсоиду ρ , имеем

$$\zeta \cos P = \frac{\partial x}{\partial \rho} d\rho = \frac{\partial x}{\partial \rho} \frac{d\rho}{dn} dn = \frac{\partial x}{\partial \rho} \frac{d\rho}{dn} \zeta.$$

Из этих равенств выводим

$$\cos P = \frac{\partial x}{\partial \rho} \frac{d\rho}{dn} = \frac{\partial x}{\partial u} \frac{du}{dn} = -l \frac{\partial x}{\partial u}.$$

Мы уже знаем, что

$$\frac{\partial x}{\partial u} = hR'_1 M_1 N_1,$$

где

$$R'_1 = \frac{\partial R_1}{\partial \rho} \frac{d\rho}{du} = -A \frac{\rho}{R_1};$$

и, поскольку

$$A = \frac{1}{\rho} \sqrt{(\rho^2 - a^2)(\rho^2 - b^2)(\rho^2 - c^2)} = \frac{1}{\rho} R_1 R_2 R_3 = \frac{1}{\rho} R_1 R_4,$$

можно заключить, что

$$R'_1 = R_4$$

и

$$\frac{\partial x}{\partial u} = hR_4 M_1 N_1.$$

Следовательно,

$$\cos P = hlR_4^0 M_1 N_1, \quad \zeta = \varepsilon hlR_4^0 M_1 N_1.$$

Теперь, применяя известную формулу, можно определить потенциал V' , обусловленный слоем толщины ζ . На поверхности эллипсоида имеем

$$V' = -\frac{4\pi}{3}\varepsilon hR_4^0 S_1^0 R_1^0 M_1 N_1.$$

Внутри эллипсоида

$$V' = -\frac{4\pi h}{3}\varepsilon R_4^0 S_1^0 R_1 M_1 N_1$$

и, поскольку $R_1 M_1 N_1 = x$,

$$V' = -\frac{\varepsilon T x S_1^0}{R_1^0};$$

отсюда

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{T x S_1^0}{R_1^0}.$$

Снаружи эллипсоида имеем

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{4\pi h}{3}R_4^0 R_1^0 S_1 M_1 N_1 = -\frac{T x S_1}{R_1}.$$

Таким образом, величина $\frac{\partial V}{\partial x}$, представляющая собой составляющую силы притяжения, параллельную оси Ox , пропорциональна x внутри эллипсоида; снаружи же зависимость несколько сложнее.

Теорема Айвори. Рассмотрим два софокусных эллипсоида: первый E_0 определен параметром ρ_0 , второй E_1 — параметром ρ_1 , причем $\rho_1 > \rho_0$ (рис. 18). Отметим две соответственные точки P_0 и P_1 , эллиптические координаты которых равны (ρ_0, μ, ν) и (ρ_1, μ, ν) соответственно. Прямоугольные координаты этих точек пропорциональны, т. е.

$$x_0 = p x_1, \quad y_0 = q y_1, \quad z_0 = r z_1,$$

где p, q, r — функции от ρ_0 и от ρ_1 .

Теорема Айвори устанавливает отношение силы притяжения эллипсоида E_1 в точке P_0 к силе притяжения эллипсоида E_0 в точке P_1 . Составляющая первой из этих сил, параллельная оси Ox , равна

$$4\pi h R_4^1 S_1^0 R_1^0 M_1 N_1;$$

соответствующая составляющая второй силы равна

$$4\pi h R_4^0 R_1^0 S_1^1 M_1 N_1.$$

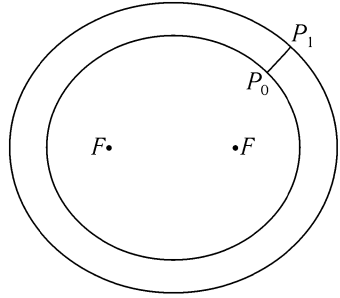


Рис. 18

Отсюда отношение

$$\frac{R_4^0}{R_4^1} = C^{\text{те}};$$

аналогично находятся отношения составляющих сил притяжения, параллельных осям Oy и Oz , равные соответственно

$$\frac{R_5^0}{R_5^1} \quad \text{и} \quad \frac{R_6^0}{R_6^1}.$$

Эллипсоид Маклорена.¹ Возьмем однородный эллипсоид и повернем его вокруг оси Ox на бесконечно малый угол ω . При этом точка с координатами x, y, z получит новые координаты

$$x, \quad y + \omega z, \quad z - \omega y,$$

а потенциал ее примет вид

$$V(x, y + z\omega, z - y\omega) = V(x, y, z) + \omega \left(z \frac{\partial V}{\partial y} - y \frac{\partial V}{\partial z} \right).$$

Потенциал $V' - V$ обусловлен поверхностным слоем, заключенным между двумя эллипсоидами.

Если точка с координатами (x, y, z) расположена внутри эллипсоида, то составляющие действующей на нее силы равны

$$-\frac{TxS_1^0}{R_1^0}, \quad -\frac{TyS_2^0}{R_2^0}, \quad -\frac{TzS_3^0}{R_3^0};$$

¹Сейчас принято говорить: сфероид Маклорена.

этой силе соответствует потенциал

$$V = V_0 - \frac{T}{2} \left(x^2 \frac{S_1}{R_1} + y^2 \frac{S_2}{R_2} + z^2 \frac{S_3}{R_3} \right),$$

где V_0 — потенциал в центре тела. Эта формула верна также и на поверхности эллипсоида, а значит,

$$\frac{\partial V}{\partial y} \quad \text{и} \quad \frac{\partial V}{\partial z}$$

пропорциональны значениям y и z , и имеет место равенство

$$V' - V = A\omega yz = A\omega R_4 M_4 N_4.$$

Согласно формуле, приведенной выше (стр. 134), толщина слоя в некоторой точке равна

$$\frac{5A\omega l}{4\pi} \frac{M_4 N_4}{S_4^0}.$$

Чтобы эллипсоид мог являться фигурой равновесия, на его поверхности должно выполняться следующее условие:

$$V + \frac{\omega^2}{2}(y^2 + z^2) = C^{\text{те}}.$$

Обсудим теперь более общую проблему. Выясним, может ли трехосный эллипсоид быть фигурой равновесия, учитывая, что помимо внутренних сил взаимного притяжения на него действует сила, обусловленная потенциалом

$$\frac{1}{2}(\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2),$$

где α, β, γ — некоторые константы.

Для того чтобы имело место равновесие, необходимо, чтобы на поверхности эллипсоида, задаваемого уравнением

$$\frac{x^2}{R_1^2} + \frac{y^2}{R_2^2} + \frac{z^2}{R_3^2} - 1 = 0,$$

была постоянной функция

$$x^2 \left(\alpha - \frac{T S_1}{R_1} \right) + y^2 \left(\beta - \frac{T S_2}{R_2} \right) + z^2 \left(\gamma - \frac{T S_3}{R_3} \right).$$

Следовательно, должно выполняться равенство

$$\alpha R_1^2 - T S_1 R_1 = \beta R_2^2 - T S_2 R_2 = \gamma R_3^2 - T S_3 R_3. \quad (\text{I})$$

В нашем частном случае вращающегося эллипсоида $\alpha = 0$, $\beta = \gamma = \omega^2$, и равенство принимает вид

$$T S_1 R_1 = \omega^2 R_2^2 - T S_2 R_2 = \omega^2 R_3^2 - T S_3 R_3;$$

отсюда

$$\frac{\omega^2}{T} = \beta \frac{R_3 S_3 - R_1 S_1}{R_3^2} = \beta \frac{R_2 S_2 - R_1 S_1}{R_2^2}; \quad (\text{II})$$

очевидно,

$$T = \frac{4\pi}{3} R_1 R_2 R_3.$$

В задаче с неизвестными $\rho^2 - a^2$, $\rho^2 - b^2$, $\rho^2 - c^2$ величина T задана изначально.

Согласно первоначальному условию, величина ω^2 должна быть положительна. Значит,

$$R_2 S_2 - R_1 S_1 > 0, \quad R_3 S_3 - R_1 S_1 > 0.$$

Эти неравенства всегда справедливы. Докажем, например, что верно первое из них, т. е.

$$R_2 S_2 - R_1 S_1 > 0.$$

Заметим, что величины R_1 , R_2 , S_1 и S_2 положительны, поскольку $\rho^2 > a^2$, а значит, должно быть верно следующее:

$$\frac{S_2}{S_1} > \frac{R_1}{R_2},$$

т. е.

$$\frac{R_2 \int_0^u \frac{du}{R_2^2}}{R_1 \int_0^u \frac{du}{R_1^2}} > \frac{R_1}{R_2}$$

или

$$\frac{\int_0^u \frac{du}{R_2^2}}{\int_0^u \frac{du}{R_1^2}} > \frac{\frac{1}{R_2^2}}{\frac{1}{R_1^2}},$$

что возвращает нас к известной арифметической теореме. Значение первого отношения находится в интервале между наибольшим и наименьшим значениями отношения величин, расположенных под знаком интеграла: наибольшее из этих значений, соответствующее $u = 0$ и $\rho = \infty$, есть единица, наименьшее равно $\frac{\rho^2 - a^2}{\rho^2 - b^2}$. Теорема, таким образом, доказана. Более общее доказательство будет приведено ниже.

Далее мы видим, что ось вращения не может быть осью Oy , так как необходимо, чтобы величина $R_2 S_2$ была наибольшей из трех аналогичных величин.

Уравнение (II) имеет одно очевидное решение, а именно, $R_2 = R_3$, которое соответствует эллипсоиду вращения вокруг оси Ox . Такой эллипсоид называется эллипсоидом Маклорена.

Эллипсоид Якоби. Равенство (II) может также описывать другой эллипсоид, а именно — эллипсоид, найденный Якоби; однако, прежде чем мы займемся его изучением, необходимо сделать одно замечание.

Рассматривая некоторый однородный эллипсоид, мы всегда можем подобрать постоянные α, β, γ так, чтобы выполнялось равенство (I), т. е. чтобы этот эллипсоид находился в равновесии под действием силы тяжести и некоторой дополнительной силы, составляющие которой равны $\alpha x, \beta y, \gamma z$. Далее мы предполагаем, что $\alpha = 0$.

Условие равновесия однородного эллипсоида E , на который действуют сила тяжести и некая противодействующая сила, обусловленная потенциалом $\frac{1}{2}(\beta y^2 + \gamma z^2)$, заключается в том, чтобы на его поверхности функция

$$U = V + \frac{1}{2}(\beta y^2 + \gamma z^2)$$

была постоянной.

Допустим, что эллипсоид слабо деформируется, так что его новая поверхность Σ мало отличается от эллипсоидальной, и выясним, при каком условии эта Σ даст фигуру равновесия, полагая, что на жидкость по-прежнему действуют те же силы, т.е. сила тяжести и сила αx , βy , γz .

Обозначив потенциал фигуры Σ через $V + v$, запишем для нее условие равновесия на поверхности

$$V + v + \frac{1}{2}(\beta y^2 + \gamma z^2) = C^{\text{те}}.$$

Проведем нормаль к поверхности E и обозначим ее длину между E и Σ через ζ . Величину ζ можно представить в виде суммы сферических функций

$$\zeta = - \sum \beta l M N;$$

на поверхности имеем

$$v = \sum \frac{4\pi\beta}{2n+1} R^0 S^0 M N.$$

С другой стороны,

$$U = U_0 + \frac{\partial U}{\partial n} \zeta$$

с точностью до величин порядка ζ^2 . Обозначив напряженность поля тяжести на поверхности через g , запишем

$$g = - \frac{\partial U}{\partial n},$$

откуда

$$U = U_0 - g\zeta.$$

Условие равновесия требует, чтобы функция U была постоянной, а поскольку

$$U_0 = V + \frac{1}{2}(\beta y^2 + \gamma z^2) = C^{\text{те}},$$

$$U = V + v + \frac{1}{2}(\beta y^2 + \gamma z^2) = C^{\text{те}},$$

то необходимо, чтобы на поверхности была постоянной функция

$$v + g\zeta,$$

т. е. чтобы выполнялось следующее равенство:

$$\sum \frac{4\pi\beta}{2n+1} R^0 S^0 MN - \sum gl\beta MN = C^{\text{те}}. \quad (1)$$

Я утверждаю, что произведение gl постоянно для эллипсоида. В самом деле, если сместить эллипсоид параллельно оси Ox , равновесие не нарушится, так как, согласно условию, $\alpha = 0$ и работа силы αx , βy , γz также равна нулю. Мы уже знаем, что

$$\zeta = K l M_1 N_1,$$

где K — некоторая константа. Предыдущее уравнение сводится в этом случае к виду

$$\frac{4\pi K}{3} R_1^0 S_1^0 M_1 N_1 - gl K M_1 N_1 = C^{\text{те}};$$

это верно, только если

$$gl = \frac{4\pi}{3} R_1^0 S_1^0.$$

Тогда уравнение (1) принимает вид

$$\sum \left(\frac{R^0 S^0}{2n+1} - \frac{R_1^0 S_1^0}{3} \right) MN = C^{\text{те}}.$$

Избавившись от индекса 0, запишем уравнение равновесия

$$\frac{R_i S_i}{2n+1} - \frac{R_1 S_1}{3} = 0.$$

Если масса находится в равновесии под действием сил притяжения и центробежной силы, равновесие сохранится и после поворота осей

¹Это — так называемая теорема Кельвина: полное ускорение в любой точке на поверхности равновесного однородного эллипсоида обратно пропорционально длине перпендикуляра l из центра до касательной плоскости, проведенной к испытываемой точке. В данном случае

$$l = \left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4} \right)^{\frac{1}{2}},$$

где a , b , c — полуоси эллипсоида.

на малый угол. Такой поворот представляет собой одно из тех преобразований, которым можно подвергать эллипсоид Якоби, не нарушая равновесия.

Мы знаем, что в этом случае

$$\zeta = M_4 N_4$$

с точностью до некоторого постоянного множителя (стр. 140), откуда можно заключить, что для эллипсоида Якоби верно соотношение

$$\frac{R_4 S_4}{5} = \frac{R_1 S_1}{3}.$$

И наоборот, предположим, что эллипсоид находится в равновесии под действием сил притяжения и силы, обусловленной потенциалом

$$\frac{1}{2}(\beta y^2 + \gamma z^2).$$

Я утверждаю, что если возможно повернуть этот эллипсоид на угол ω , не нарушая равновесия, то $\beta = \gamma$.

Действительно, на поверхности должно выполняться равенство

$$V + \frac{1}{2}(\beta y^2 + \gamma z^2) = V_1 = C^{\text{те}},$$

где V — ньютоновский потенциал. В вершине малой оси $V = V_1$. Если повернуть эллипсоид на угол ω вокруг оси Ox , то вершина малой оси останется на поверхности, постоянная V_1 не изменится, V также не изменится.

Известно, что

$$\delta V + \beta y \delta y + \gamma z \delta z = \delta V_1;$$

таким образом, на поверхности эллипсоида

$$\beta y \delta y + \gamma z \delta z = 0.$$

Учитывая, что

$$\delta y = \omega z,$$

$$\delta z = -\omega y,$$

получим для поверхности условие

$$(\beta - \gamma)\omega yz = 0.$$

Следовательно,

$$\beta = \gamma.$$

Уравнение эллипсоидов Якоби. Теперь нам необходимо обсудить уравнение эллипсоидов Якоби

$$\frac{R_4 S_4}{5} = \frac{R_1 S_1}{3}. \quad (1)$$

По способу получения это уравнение не годится для описания эллипсоидов вращения; в самом деле, в случае эллипсоидов вращения $\zeta = 0$.

Поэтому вместо уравнения (1) обсудим более общее уравнение

$$F = \frac{R_k S_k}{2m+1} - \frac{R_i S_i}{2n+1} = 0,$$

где m — порядок функции R_k , n — порядок функции R_i , и подразумевается, что $\rho^2 > a^2$.

Величины F и $\frac{F}{R_k^2}$ имеют одинаковый знак, более того, R_k не может обратиться в нуль, так как корни полинома R заключены в интервале от a^2 до c^2 ; отсюда уравнение

$$F_1 = \frac{F}{R_k^2} = \frac{S_k}{(2m+1)R_k} - \frac{S_i}{(2n+1)R_i} \frac{R_i^2}{R_k^2} = 0$$

имеет те же корни, что и уравнение $F = 0$.

Корни уравнения $\frac{F}{R_k^2} = 0$ находятся между корнями производной

$$\frac{dF_1}{du} = \frac{1}{2m+1} \frac{d}{du} \frac{S_k}{R_k} - \frac{1}{2n+1} \frac{R_i^2}{R_k^2} \frac{d}{du} \frac{S_i}{R_i} - \frac{1}{2n+1} \frac{S_i}{R_i} \frac{d}{du} \left(\frac{R_i^2}{R_k^2} \right).$$

По определению

$$\frac{d}{du} \frac{S_k}{R_k} = \frac{2m+1}{R_k^2}$$

и, следовательно,

$$\frac{dF_1}{du} = -\frac{2}{2n+1} \frac{S_i}{R_i} \cdot \frac{R_i}{R_k} \frac{R_i' R_k - R_i R_k'}{R_k^2} = -\frac{2S_i}{2n+1} \frac{R_i' R_k - R_i R_k'}{R_k^3}.$$

Но S_i не может обращаться в нуль, значит, корнями $\frac{dF_1}{du}$ являются корни уравнения $R'_i R_k - R_i R'_k = 0$. Разумеется, нас интересуют только корни, большие a^2 .

Производная данной функции по u имеет вид

$$R''_i R_k - R_i R''_k;$$

кроме того, по определению R_i и R_k ,

$$R''_i = (H\rho^2 + K)R_i;$$

отсюда

$$R_i R_k [n(n+1) - m(m+1)]\rho^2 + K_i - K_k.$$

Два первых множителя не имеют корней относительно ρ^2 , больших a^2 , третий же имеет только один корень. Следовательно¹, производная $\frac{dF}{du}$ не может иметь более двух корней, а F или F_1 — более трех.

Предположим, что функция $\frac{R_i}{R_k}$ постоянно возрастает, и ее производная нигде не обращается в нуль; в этом случае функция F_1 постоянно убывает и не может иметь ни одного корня. Напротив, если $\frac{R_i}{R_k}$ всегда убывает, F_1 возрастает на всей области определения. С другой стороны, при $u = 0$ и $\rho = \infty$ значение функции $\frac{R_i}{S_i}$ почти равно $\frac{1}{\rho}$. Следовательно, функция исходит из нуля и либо постоянно возрастает, либо постоянно убывает, т.е. не имеет корней кроме $\rho = \infty$, каковой корень не является допустимым.

В самом общем случае, как мы видели, функция F может иметь до трех корней, включая и корень $\rho = \infty$, т.е. ни одного, один или два корня, больших a^2 . Ни одного корня она не имеет, если $\frac{R_i}{R_k}$ постоянно возрастает или убывает.²

Вернемся к уравнению

$$F = \frac{R_1 S_1}{3} - \frac{R_i S_i}{2n+1} = 0.$$

¹Согласно теореме Ролля.

²Отсутствие корней означает, что новых фигур равновесия в этом случае нет.

Если R_i содержит $\sqrt{\rho^2 - a^2}$ в качестве множителя, то функция $\left(\frac{R_i}{R_1}\right)^2$ представляет собой полином, все корни которого вещественны и заключены в интервале от a^2 до c^2 , а ее производная не может обращаться в нуль при $\rho^2 > a^2$. Функция F в этом случае не имеет корней, больших a^2 . Предположим теперь, что R_i нельзя разделить на $\sqrt{\rho^2 - a^2}$ и что n много больше единицы. Я утверждаю, что в этом случае F имеет по крайней мере один корень. В самом деле, если подставить a^2 в уравнение, то первый член обратится в нуль, а второй станет отрицательным; значение суммы при этом также станет отрицательным. Если же вместо ρ подставить ∞ , то первый член уравнения станет приблизительно равен

$$\frac{1}{\rho} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2n+1} \right),$$

и результат будет положительным. Следовательно, существует некоторое нечетное число корней уравнения в интервале от a^2 до $+\infty$, а так как оно не может быть больше двух, то остается один и только один корень.

Это рассуждение не действительно при $n = 1$, т. е. если

$$R_i = R_2 = \sqrt{\rho^2 - b^2}$$

или если

$$R_i = R_3 = \sqrt{\rho^2 - c^2};$$

в этих случаях функция

$$\frac{R_i^2}{R_1^2} = \frac{\rho^2 - b^2}{\rho^2 - a^2}$$

и аналогичные ей функции всегда возрастают при любом ρ^2 в интервале от ∞ до a^2 . Следовательно, соответствующее уравнение не имеет корней; эта теорема уже была изложена выше (стр. 142).

Применим это правило к эллипсоиду Якоби. Запишем уравнение

$$\frac{R_1 S_1}{3} - \frac{R_4 S_4}{5} = 0;$$

функция R_4 не делится на R_1 , значит существует один и только один корень ρ .

Таким образом, среди софокусных эллипсоидов существует один и только один эллипсоид, являющийся фигурой равновесия — это эллипсоид Якоби.

Фигуры, порождаемые эллипсоидом Маклорена. Положим $b^2 = c^2$ и выясним, существуют ли фигуры равновесия, мало отличающиеся от эллипсоида Маклорена. Для того чтобы существовала некоторая фигура Σ , мало отличающаяся от эллипсоида Маклорена, необходимо, чтобы выполнялось условие

$$\frac{R_1 S_1}{3} = \frac{R_i S_i}{2n + 1}. \quad (1)$$

Положим

$$\frac{z}{y} = \operatorname{tg} \varphi;$$

тогда, как мы уже видели,

$$N_i = \cos p\varphi,^1$$

$$M_i = hF\left(\sqrt{\frac{a^2 - \mu^2}{a^2 - b^2}}\right),$$

где h — константа. Положим также

$$F(\xi) = (1 - \xi^2)^{\frac{p}{2}} D^{n+p} (1 - \xi^2)^n.$$

Необходимым и достаточным условием того, чтобы уравнение (1) имело один корень, является неделимость функции R_i на $\sqrt{\rho^2 - a^2}$. Следовательно, функция M_i также не должна быть делима на $\sqrt{a^2 - \mu^2}$, а значение суммы $n + p$, где n и p — некоторые определенные числа, должно быть четным. Фигура равновесия, близкая к эллипсоиду вращения, определяется соотношением

$$\zeta = \varepsilon l M_i \cos p\varphi,$$

откуда в общем виде следует

$$\zeta = l M_i (\varepsilon \cos p\varphi + \varepsilon' \sin p\varphi).$$

¹Или $N_i = \sin p\varphi$.

Предположим, что $\varepsilon' = 0$; в этом случае следует повернуть координатные оси на соответствующий угол вокруг оси Ox . В фигуре, получаемой с помощью такого поворота, ось Ox выступает как ось симметрии порядка p . При изменении знака ξ значение функции $F(\xi)$ не меняется, следовательно, плоскость yz является плоскостью симметрии. Если $p = 0$, то ζ не зависит от φ , и фигура является фигурой вращения.

Среди полученных уравнений нет необходимости рассматривать уравнение с $n = 0$, так как в этом случае не сохраняется объем. Также следует исключить уравнение с $n = 1$, поскольку функция R_i в этом случае будет делима на $\sqrt{\rho^2 - a^2}$. Таким образом, наименьшее значение n равно 2. Этому значению n соответствуют два значения p : $p = 0$ и $p = 2$.

Какие же из этих фигур имеют эллипсоидальную форму? Рассмотрим два эллипсоида E_0 и E_1 , причем E_1 мало отличается от E_0 , но не софокусен ему. Потенциал внутри каждого из них представляет собой функцию второго порядка от декартовых координат точки. Разность потенциалов также является полиномом второго порядка, кроме того, это потенциал, создаваемый слоем, заключенным между данными эллипсоидами. Следовательно, можно представить этот потенциал в виде суммы

$$\sum \varepsilon RMN,$$

где R, M, N — сферические функции порядка 0, 1 или 2.

На поверхности

$$V = \sum \varepsilon R_0 MN,$$

а внутри, как следствие,

$$V = \sum \varepsilon \frac{R_0}{S_0} SMN;$$

толщина слоя, создающего этот потенциал, имеет вид

$$\zeta = \sum \frac{2n+1}{4\pi} \frac{\varepsilon}{S_0} MN = \sum \varepsilon' l MN.$$

В сумму входят только члены порядка 0, 1 или 2, однако, как мы заметили ранее, функция M не может иметь порядок 0 или 1; таким образом, остается лишь $n = 2$ и $p = 0$ или $p = 2$. В случае $p = 0$ рассматриваемая поверхность является поверхностью вращения, это эллипсоид, мало отличающийся от первого. Если $p = 2$, то поверхность представляет собой эллипсоид Якоби.

Изменение ω^2 в зависимости от сжатия. При изменении ρ^2 от a^2 до $+\infty$ сжатие рассматриваемых эллипсоидов изменяется в интервале от 0 до 1.

При нулевом сжатии $\omega^2 = 0$. При увеличении сжатия величина ω^2 также увеличивается, однако она может иметь максимумы и минимумы. Также при увеличении сжатия возрастает главный момент инерции.

Мы знаем, что величина

$$TU_0 = H = W + \frac{\omega^2}{2} J$$

не может превышать определенного предела. Кроме того,

$$dH = dW + \omega J d\omega + \frac{\omega^2}{2} dJ.$$

Если тело находится в равновесии, то

$$dW + \frac{\omega^2}{2} dJ = 0.$$

Отсюда следует, что при равновесии

$$dH = \omega J d\omega.$$

При увеличении сжатия J возрастает до бесконечности; ω при этом уменьшается и стремится к нулю, а ω^2 исходит из нуля и возвращается в нуль, проходя на этом интервале через максимум.

Замечание. Изменяя ρ^2 в интервале от ∞ до a^2 , мы будем получать все более сжатые эллипсоиды, пока не дойдем до таких, для которых верно равенство

$$\frac{R_1 S_1}{3} = \frac{R_i S_i}{2n+1}.$$

Я утверждаю, что первая из встреченных нами фигур равновесия будет эллипсоидом Якоби. В самом деле, если предположить, что функция $\frac{R_i}{R_4}$ возрастает на всем рассматриваемом промежутке, то очевидно,

что функция $\frac{R_4 S_4}{5} - \frac{R_i S_i}{2n+1}$ всегда положительна.

При $\rho^2 = \infty$ имеем

$$\frac{R_1 S_1}{3} > \frac{R_4 S_4}{5} > \frac{R_i S_i}{2n+1};$$

увеличивая ρ , получим в итоге

$$\frac{R_1 S_1}{3} = \frac{R_4 S_4}{5} > \frac{R_i S_i}{2n+1}.$$

Далее увеличивая ρ , получим

$$\frac{R_1 S_1}{3} = \frac{R_i S_i}{2n+1},$$

однако, как мы видели, первой фигурой равновесия будет эллипсоид Якоби.

Фигуры, порождаемые эллипсоидом Якоби. Нам осталось рассмотреть фигуры равновесия, мало отличающиеся от эллипсоида Якоби. Имеем

$$\frac{R_1 S_1}{3} = \frac{R_4 S_4}{5},$$

а для фигуры, близкой к эллипсоиду Якоби,

$$\frac{R_1 S_1}{3} = \frac{R_i S_i}{2n+1};$$

высота поверхности новой фигуры над поверхностью эллипсоида запишется как

$$\zeta = \varepsilon l M_i N_i.$$

Таким образом, нам следует рассмотреть два уравнения:

$$\frac{R_1 S_1}{3} = \frac{R_4 S_4}{5} = \frac{R_i S_i}{2n+1}.$$

При заданном объеме

$$V = \frac{4\pi}{3} \sqrt{(\rho^2 - a^2)(\rho^2 - b^2)(\rho^2 - c^2)}$$

имеем три неизвестных $\rho^2 - a^2$, $\rho^2 - b^2$ и $\rho^2 - c^2$.

Для того чтобы уравнение

$$\frac{R_1 S_1}{3} = \frac{R_i S_i}{2n+1}$$

имело один корень, функция R_i должна быть неделима на $R_1 = \sqrt{\rho^2 - a^2}$, а для того чтобы уравнение

$$\frac{R_4 S_4}{5} = \frac{R_i S_i}{2n+1}$$

имело один корень, функция $\frac{R_i}{R_4}$ не должна возрастать на всей области определения. Отсюда единственными возможными формами R_i являются следующие:

$$P, \quad P \times \sqrt{\rho^2 - b^2}, \quad P \times \sqrt{\rho^2 - c^2}, \quad P \times \sqrt{(\rho^2 - b^2)(\rho^2 - c^2)},$$

где P — полином от ρ^2 .

Выясним, в самом ли деле возможны эти четыре формы, учитывая, что $R_4 = \sqrt{(\rho^2 - b^2)(\rho^2 - c^2)}$.

1-й тип. Функция R_i является полиномом; если α — наибольший корень R_i , можно положить

$$R_i = (\rho^2 - \alpha)\Pi_i;$$

корень α находится в интервале от a^2 до c^2 , и имеет место равенство

$$\frac{R_i}{R_4} = \sqrt{\frac{\rho^2 - \alpha}{\rho^2 - b^2}} \cdot \sqrt{\frac{\rho^2 - \alpha}{\rho^2 - c^2}} \Pi_i.$$

Функция Π_i постоянно возрастает, $\sqrt{\frac{\rho^2 - \alpha}{\rho^2 - c^2}}$ также постоянно возрастает, $\sqrt{\frac{\rho^2 - \alpha}{\rho^2 - b^2}}$ возрастает при $\alpha < b^2$ и убывает в противном случае. Функция $\sqrt{\frac{\rho^2 - \alpha}{\rho^2 - b^2}}$ не должна убывать, поэтому $\alpha < b^2$, и, как следствие, все корни полинома R_i заключены в интервале от b^2 до c^2 .

Среди функций Ламэ порядка n существует одна и только одна, все корни которой заключены в интервале от b^2 до c^2 ; ее и следует принять за R_i [17].

2-й тип. Возьмем $R_i = \sqrt{\rho^2 - b^2} P$ и обозначим наибольший корень полинома P через α . Имеем

$$\frac{R_i}{R_4} = \sqrt{\rho^2 - \alpha} \sqrt{\frac{\rho^2 - \alpha}{\rho^2 - c^2}} \Pi.$$

Все три множителя возрастают на всей области определения, поэтому все функции этого типа следует отбросить.

3-й тип. Положим

$$R_i = \sqrt{\rho^2 - b^2} (\rho^2 - \alpha) \Pi,$$

где Π — полином, корни которого меньше α . Имеем

$$\frac{R_i}{R_4} = \sqrt{\rho^2 - \alpha} \sqrt{\frac{\rho^2 - \alpha}{\rho^2 - b^2}} \Pi.$$

Для того чтобы это уравнение имело одно решение, величина α должна быть меньше b^2 . Значит, все корни P заключены в интервале от b^2 до c^2 .

4-й тип. В случае функций четвертого типа полином $\frac{R_i}{R_4}$ не имеет корней, больших α , следовательно, нам нет необходимости рассматривать эти функции.

Таким образом, для того чтобы близкая к эллипсоиду Якоби фигура была фигурой равновесия, необходимо, чтобы функция R_i была одной из тех функций, которые мы назвали $R_{0,n}$. Я утверждаю, что это условие необходимо и достаточно. Действительно, предположим, что b^2 изменяется в интервале от c^2 до a^2 . Каждому значению b^2 соответствует такое значение ρ^2 , что выполняется равенство

$$\frac{R_1 S_1}{3} = \frac{R_4 S_4}{5}.$$

Рассмотрим функцию

$$F = \frac{R_4 S_4}{5} - \frac{R_i S_i}{2n+1};$$

при $b^2 = c^2$ функция $\frac{R_i}{R_4}$ постоянно возрастает, следовательно, значение F положительно. Если $b^2 = a^2$, то соответствующее значение ρ^2 стремится к a^2 , тогда

$$R_4 = 0.$$

Значение R_i не равно нулю, поскольку R_i не содержит ни $\sqrt{\rho^2 - a^2}$, ни $\sqrt{\rho^2 - c^2}$, и все ее корни находятся в интервале от b^2 до c^2 . Следовательно,

$$F < 0,$$

и рассматриваемые уравнения, безусловно, имеют некоторую систему корней.

Отсюда очевидно, что существуют фигуры равновесия, близкие к эллипсоиду Якоби.

Замечание. Какова же первая из встреченных нами фигур равновесия? Иными словами, при каком значении n значение ρ максимально?

Рассмотрим функции $R_{0,m}$ и $R_{0,n}$, причем

$$m > n.$$

Я утверждаю, что функция

$$\frac{R_{0,m}}{R_{0,n}} = \frac{R_k}{R_i}$$

постоянно возрастает. Докажем, что ее производная по u всегда положительна. Эта производная, с точностью до некоторого положительного множителя, равна

$$R'_k R_i - R_k R'_i; \quad (*)$$

причем если R_i не делится на $\sqrt{\rho^2 - a^2}$, то R'_i делится, и наоборот. Но если функции R_i и R_k не делимы ни на $\sqrt{\rho^2 - a^2}$, ни на $\sqrt{\rho^2 - b^2}$, то в результате производная

$$R'_k R_i - R_k R'_i$$

обращается в нуль при $\rho^2 = a^2$.

Выражая R_i и R_k как функции от аргумента u , имеем

$$R_i = F(pu), \quad R'_i = p'uF'[p(u)],$$

причем производная не имеет корней, больших a^2 . В самом деле, производная функции $(*)$, взятая по u , равна, как мы уже видели,

$$(R_k'' R_i - R_k R_i'') = (\varphi_k - \varphi_i) R_i R_k.$$

Функции R_i и R_k не могут обращаться в нуль, а $\varphi_k - \varphi_i$ не может иметь двух нулей, поскольку это полином первого порядка от ρ^2 . Таким образом, при $a^2 \leq \rho^2$, т. е. на промежутке $0 < u \leq e_1$, производная не может обращаться в нуль более чем дважды.

Производная, равная нулю при $u = 0$ и $u = e_1$, не может обращаться в нуль внутри ограниченного этими значениями промежутка, значит, $\frac{R_k}{R_i}$ всегда возрастает, пока ρ^2 изменяется в интервале от a^2 до $+\infty$. Отсюда также следует, что

$$\frac{R_i S_i}{2n+1} > \frac{R_k S_k}{2m+1}.$$

Таким образом, изменяя ρ^2 в интервале от ∞ до a^2 , мы сначала встретим значение, удовлетворяющее уравнению

$$\frac{R_4 S_4}{5} = \frac{R_i S_i}{2n+1},$$

а затем значение, удовлетворяющее уравнению

$$\frac{R_4 S_4}{5} = \frac{R_k S_k}{2n+1}.$$

То есть в первом случае $n = 1$, а во втором $n = 2$ — эти значения n мы уже рассматривали. Теперь нам предстоит изучить поверхность, близкую к эллипсоиду Якоби и соответствующую функции $R_{0,3}$.

Рассмотрим прежде поверхность, соответствующую $R_{0,n}$ в общем виде. Толщина слоя запишется следующим образом:

$$\zeta = \varepsilon l M_i N_i.$$

Эта толщина равна нулю в тех точках, где

$$M_i N_i = 0,$$

или

$$R_i M_i N_i = 0.$$

Это выражение можно представить в виде суммы членов второго порядка

$$\frac{x^2}{\alpha^2 - a^2} + \frac{y^2}{\alpha^2 - b^2} + \frac{z^2}{\alpha^2 - c^2} = 1;$$

так как значения α^2 находятся в интервале от b^2 до c^2 , соответствующие поверхности являются двуполостными гиперboloидами, пересекающимися эллипсоид по двум линия кривизны одного и того же семейства.

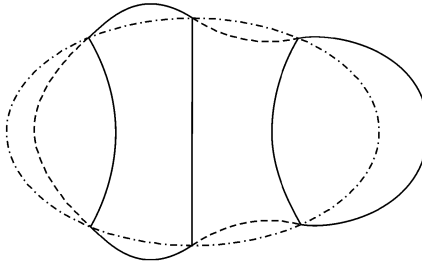


Рис. 19

С одной стороны одной из этих линий величина ζ положительна, с другой — отрицательна¹. По этим данным можно построить фигуру равновесия для $n = 3$. На рис. 19 штрих-пунктирной линией показан видимый контур эллипсоида, непрерывной линией — пересечение рассматриваемой поверхности с эллипсоидом, а также видимый внешний контур ее части, находящейся вне эллипсоида, пунктиром показан контур части поверхности, находящейся внутри эллипсоида. Одна из линий кривизны является, кроме того, главным эллипсом, как это видно из соотношения

$$R_{0,3} = \sqrt{\rho^2 - c^2} \times P. \quad [18]$$

Исходя из этих же соображений, построим фигуру равновесия, соответствующую $R_{0,4}$ (рис. 20).

Заметим, что мы не можем взять в качестве функции R_i какую-либо функцию второго порядка, так как в этом случае вместо

¹Точнее сказать: с вогнутой стороны одной из этих линий кривизны, изображенной в правой части рис. 19, величина ζ положительна, с аналогичной же стороны второй линии ζ отрицательна.

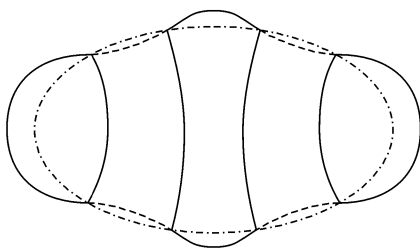


Рис. 20

функции $R_{0,2}$ необходимо будет взять полином вида $\rho^2 - h^2$, что даст в итоге другой эллипсоид, а, как мы уже видели, при данной скорости вращения может существовать только эллипсоид Якоби.

Исходя из вышеизложенного, если изменять b^2 в интервале от c^2 до a^2 , мы получим эллипсоиды, каждому из которых соответствует одно и только одно значение ω ; ω не может иметь ни максимумов, ни минимумов, поскольку если бы существовал такой максимум или минимум ω_1 , то значению, близкому к ω_1 соответствовали бы две эллипсоидальные фигуры, что не верно. Таким образом, величина ω всегда изменяется только в одном направлении.

Предположим, что b^2 и c^2 стремятся к нулю. Тогда форма эллипсоида будет стремиться к форме вытянутой иглы, а величина ω одинакова только у подобных эллипсоидов. Таким образом, достаточно выяснить, что происходит, когда a неограниченно возрастает при фиксированных значениях b и c . В этом случае мы получим эллиптический цилиндр, причем равнодействующая внутренних сил взаимного притяжения цилиндра и центробежной силы должна быть направлена по нормали к цилиндру, т.е. параллельно плоскости yOz . Отметим на одной из образующих, проходящих через ось вращения, точку. Благодаря симметрии сила притяжения в этой точке должна быть параллельна плоскости yOz , отсюда центробежная сила, которая перпендикулярна оси Oz , может быть только нулевой, и, следовательно, при бесконечном возрастании a величина ω стремится к нулю [19].

С другой стороны, нужно заметить, что для того, чтобы стало возможным равновесие, цилиндр непременно должен быть цилиндром вращения.

УСТОЙЧИВОСТЬ НАЙДЕННЫХ ФИГУР

Графическое представление полученных результатов. Построим плоскую систему координат (рис. 21) и будем откладывать по оси абсцисс значения R_2^2/R_1^2 , а по оси ординат — значения R_3^2/R_1^2 ; эти величины представляют собой отношение средней оси эллипсоида к его малой оси и отношение большой оси к малой соответственно.

Сначала отметим точку A с координатами $(1, 1)$; соответствующей фигурой является сфера. Часть биссектрисы угла xOy , начинающаяся в точке A , соответствует эллипсоидам

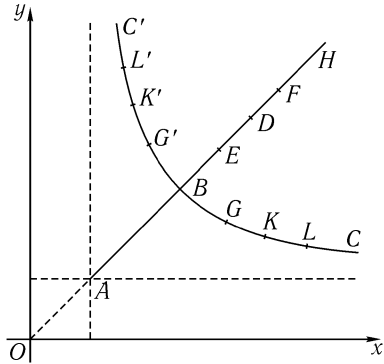


Рис. 21

вращения. Эллипсоиды Якоби представлены кривой CBC' , которая симметрична относительно биссектрисы и пересекает ее в точке B .

В случае эллипсоидов Маклорена величина ω^2 возрастает при перемещении от точки A к точке D , после чего, по мере удаления от точки D , она начинает убывать и в бесконечности обращается в нуль. Точки на кривой CBC' , симметричные относительно оси AH , представляют одинаковые, но развернутые на 90° эллипсоиды. Величина ω^2 уменьшается при движении от точки B к точкам C или C' . В случае цилиндра вращения точки C и C' бесконечно удаляются от точки B ; кривая CBC' является асимптотой к прямым $x = 1$ и $y = 1$.

Отметим на прямой AH точки E и F , соответствующие фигурам равновесия, близким к эллипсоиду вращения, а на кривой CBC' отметим точки G, K, L, M и G', K', L', M' , соответствующие различным функциям $R_{0,n}$, т. е. различным фигурам равновесия, близким к эллипсоиду Якоби, с которыми мы встречались ранее.

Следует заметить, что взятые нами параметры не соответствуют в действительности данным задачи. Параметрами являются объем T , скорость вращения ω и главный момент инерции J . Положим $\mu = \omega^2 J$, тогда μ и T можно считать заданными, поскольку величина $\omega^2 J$ должна быть постоянной; μ пропорциональна пятой степени длин осей, а T —

кубу этих длин. Если положить

$$M = \frac{\mu}{T^{5/3}},$$

то M будет заданной величиной, независимой от выбранной единицы длины.

Лиувилль вычислил, каким значениям M соответствуют различные точки линий AH и CBC' . Он показал, что при перемещении по прямой AH величина M возрастает от A до D и убывает от D к H . На кривой CBC' величина M убывает при перемещении от B к C и C' [20].

Таким образом, если скорость ω очень велика, то фигур равновесия не существует; если ω находится в интервале от ω_B до ω_D , возможны две фигуры равновесия, причем обе являются эллипсоидами вращения.

При $\omega < \omega_B$ возможны четыре фигуры равновесия — два эллипсоида Маклорена и два эллипсоида Якоби; впрочем эти эллипсоиды Якоби одинаковы, как уже было отмечено.

Кривые равновесия. Рассмотрим систему, зависящую от n переменных x_1, x_2, \dots, x_n , подверженную действию системы сил, зависящей от потенциала $F(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda)$. Необходимое и достаточное условие равновесия данной системы таково, что значение F должно быть максимально по отношению к x при данном значении λ . Имеем

$$F = W - \frac{\omega^2}{2} J = W - \frac{M^2}{2J}.$$

Условие равновесия заключается в следующем:

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = \frac{\partial F}{\partial x_2} = \dots = \frac{\partial F}{\partial x_n} = 0;$$

для того чтобы равновесие было устойчивым, необходимо, кроме того, чтобы форма

$$\Phi = \sum \frac{\partial^2 F}{\partial x_i^2} \xi_i^2 + 2 \sum \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_k} \xi_i \xi_k$$

была отрицательно определенной; эту форму также можно представить в виде суммы n квадратов:

$$\Phi = \sum \alpha_k \eta_k^2.$$

Коэффициенты α_k называются коэффициентами устойчивости. Если один из этих коэффициентов обращается в нуль, то дискриминант формы Φ также обращается в нуль, поскольку в этом случае форма сводима к сумме меньшей, чем сумма n членов. Положим

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_k} = a_{i,k}.$$

Тогда определитель суммы имеет вид

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}.$$

Если равны нулю два коэффициента α_k , то миноры первого порядка определителя Δ равны нулю. Мы, однако, предположим, что это не так.

При Δ , отличном от нуля, уравнения

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial x_2} = 0, \quad \dots, \quad \frac{\partial F}{\partial x_n} = 0$$

можно решить; получим

$$x_i = \psi_i(\lambda).$$

Дифференцируя соотношение $\frac{\partial F}{\partial x_1} = 0$ по λ , получаем

$$\sum_i \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_i} \frac{dx_i}{d\lambda} + \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial \lambda} = 0;$$

это можно записать иначе:

$$\sum_i a_{1,i} \frac{dx_i}{d\lambda} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial \lambda}.$$

При Δ , отличном от нуля, можно найти значения $\frac{dx_i}{d\lambda}$, так как мы имеем n линейных уравнений с n неизвестными, а функции x в окрестности рассматриваемых значений являются однородными функциями от λ .

Предположим, что $\Delta = 0$, и при этом ни один из миноров первого порядка нулю не равен. Пусть, например,

$$\frac{\partial \Delta}{\partial a_{1,i}} \neq 0.$$

В этом случае мы можем решить $n - 1$ оставшихся линейных уравнений относительно

$$\frac{dx_2}{d\lambda}, \quad \frac{dx_3}{d\lambda}, \quad \dots, \quad \frac{dx_n}{d\lambda};$$

отсюда видим, что функции x_2, x_3, \dots, x_n являются однородными функциями от x_1 и λ .

Запишем значения x_2, x_3, \dots, x_n в функции F в виде функций от x_1 и λ , полученных из уравнений

$$\frac{\partial F}{\partial x_2} = 0, \quad \dots, \quad \frac{\partial F}{\partial x_n} = 0;$$

в результате получим функцию $\psi(x_1, \lambda)$, производная которой по x_1 запишется как

$$\frac{d\psi}{dx_1} = \frac{\partial F}{\partial x_1} + \frac{\partial F}{\partial x_2} \frac{dx_2}{dx_1} + \dots + \frac{\partial F}{\partial x_n} \frac{dx_n}{dx_1}.$$

Однако, согласно предположению, если представить x_2, x_3, \dots, x_n в виде функций от x_1 и λ , то

$$\frac{\partial F}{\partial x_2} = 0, \quad \dots, \quad \frac{\partial F}{\partial x_n} = 0.$$

Значит,

$$\frac{d\psi}{dx_1} = \frac{\partial F}{\partial x_1}.$$

Таким образом, условие равновесия имеет вид

$$\frac{d\psi}{dx_1} = 0.$$

Данное соотношение между x_1 и λ определяет некоторую кривую. Функция x_1 является однородной функцией от λ , если производная $\frac{d^2\psi}{dx_1^2}$

отлична от нуля. Условие $\Delta = 0$ эквивалентно, таким образом, условию $\frac{d^2\psi}{dx_1^2} = 0$.

Предположим, что это условие выполнено, но производная $\frac{d^2\psi}{dx_1 d\lambda}$ при этом не обращается в нуль. Кривая в этом случае имеет вертикальную касательную (рис. 22).

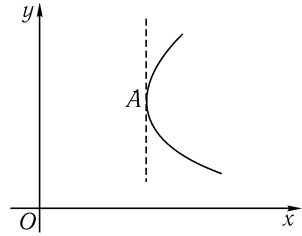


Рис. 22

Когда λ проходит через точку пересечения оси абсцисс с этой касательной, имеем для x_1 два вещественных значения, которые сливаются друг с другом, становясь затем мнимыми; то же верно и для x_2, \dots, x_n .

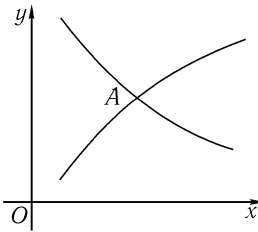


Рис. 23

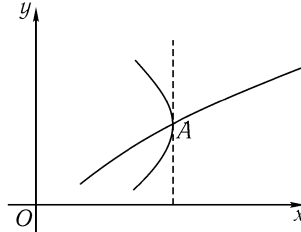


Рис. 24

При $\frac{d^2\psi}{dx_1 d\lambda} = 0$ соответствующая точка на кривой является двойной точкой с различными либо сливающимися касательными, причем одна из касательных может быть вертикальной. Имеем два различных случая: в первом обе касательных различны и не вертикальны (рис. 23), во втором же одна из касательных вертикальна, а другая — нет (рис. 24).

В первом случае два вещественных значения x сливаются, а затем, после прохождения значения, соответствующего двойной точке, снова становятся вещественными.

Во втором случае, две группы вещественных значений сливаются и становятся мнимыми, когда λ проходит критическое в данном контексте значение. Значения x до и после критического значения остаются вещественными. Другие случаи взаимного расположения линий сводятся к вышеописанному, по крайней мере, с интересующей нас точки зрения.

Обмен устойчивостью. Как мы уже замечали, равновесие устойчиво, когда значение функции F максимально при переменных x_1, x_2, \dots, x_n . *A fortiori* необходимо, чтобы значение функции F было максимальным, если при заданном x_1 изменять значения x_2, x_3, \dots, x_n произвольным образом. Значит, должны быть справедливы уравнения

$$\frac{\partial F}{\partial x_2} = \frac{\partial F}{\partial x_3} = \dots = \frac{\partial F}{\partial x_n} = 0.$$

Выразим x_2, x_3, \dots, x_n из этих уравнений, функциональный определитель которых по условию не равен нулю. Подставив эти значения в функцию $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$, получим функцию, значение которой должно достигать максимума для того, чтобы имело место равновесие. Значит, максимума должно достигать и значение функции $\psi(x_1, \lambda)$, т.е. фигура будет находиться в равновесии при $\frac{d\psi}{dx_1} = 0$; однако равновесие будет устойчивым, только если производная $\frac{d^2\psi}{dx_1^2}$ при этом будет отрицательна.

Дуга кривой $\frac{d\psi}{dx_1} = 0$ делит участок плоскости на две части: в одной $\frac{d\psi}{dx_1} > 0$, в другой $\frac{d\psi}{dx_1} < 0$. Если данная дуга не имеет сингулярностей, то производная $\frac{d^2\psi}{dx_1^2}$ не обращается в нуль и отрицательна в том случае, если область, где функция $\frac{d\psi}{dx_1}$ положительна, расположена под кривой; и наоборот, производная $\frac{d^2\psi}{dx_1^2}$ положительна, если функция $\frac{d\psi}{dx_1}$ положительна на участке над рассматриваемой кривой. Первый случай соответствует положению неустойчивого равновесия.

Заштриховав участок плоскости, где $\frac{d\psi}{dx_1}$ положительна, мы видим, что рис. 25 относится к случаю устойчивого равновесия, а рис. 26 — неустойчивого.

В случае, когда кривая $ВАС$ имеет одну касательную в точке A , возможны два различных варианта в зависимости от того, какой участок заштрихован: выпуклый или вогнутый.

На рис. 27 участок кривой $ВА$ соответствует положениям неустойчивого равновесия, в то время как участок $АС$ соответствует положе-

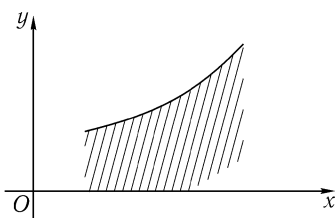


Рис. 25

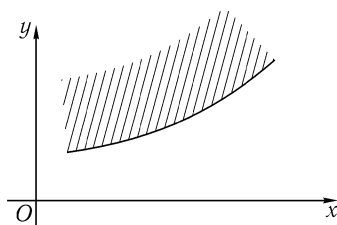


Рис. 26

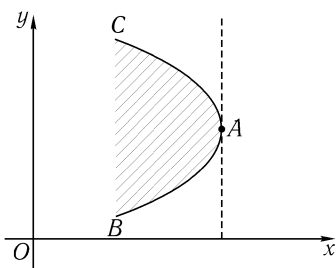


Рис. 27

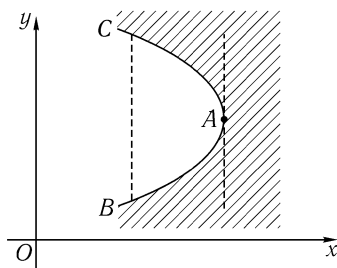


Рис. 28

ниям устойчивого равновесия. На рис. 28 представлена обратная ситуация: на участке BA — равновесие устойчиво, а на участке AC — неустойчиво.

Здесь следует отметить существенный момент: перемещаясь по соответствующим кривым и проходя через точку A , две системы фигур равновесия обмениваются устойчивостью.

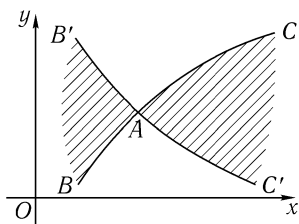


Рис. 29

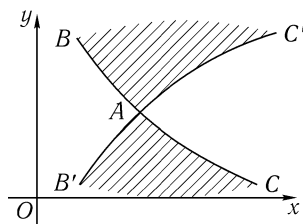


Рис. 30

В случае двойной точки, когда вертикальной касательной нет, также возможны два варианта: на рис. 29 и 30 участки BA и AC' соответствуют фигурам неустойчивого равновесия, а участки $B'A$ и AC соответствуют фигурам устойчивого равновесия. Заметим еще, что в зависимости от того, по какой кривой мы перемещаемся, BAC или $B'AC'$, фигуры равновесия переходят из устойчивых в неустойчивые, и наоборот.

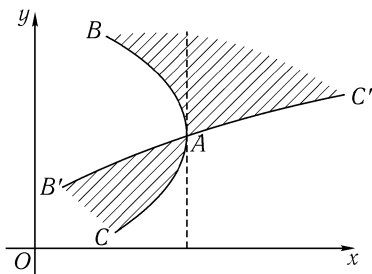


Рис. 31

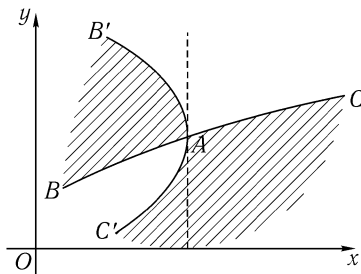


Рис. 32

Наконец, в случае двойной точки с вертикальной касательной мы приходим к такому же выводу: фигуры равновесия, получаемые при движении вдоль какой-либо кривой, обмениваются устойчивостью, проходя через точку, где $\frac{d^2\psi}{dx_1^2} = 0$ (рис. 31, 32) [21].

Устойчивость равновесия найденных фигур. Применим вышеизложенное к нашей проблеме и рассмотрим рис. 21; величина, обозначенная нами ранее μ , будет здесь представлять величину, которую в предыдущем параграфе мы назвали λ , а вместо x_1 мы воспользуемся обозначением ω .

Функция F , которая должна иметь максимальное значение, запишется как

$$W - \frac{\mu^2}{2J}.$$

Величина ω увеличивается при перемещении от A к D и уменьшается при перемещении от D к H . Величина M увеличивается в направлении AH , равно как и при перемещении от B к C или к C' .

Теперь нам нужно обсудить вопрос об устойчивости равновесия.

Выберем отправной точкой точку A , которая соответствует сфере; ω здесь равна 0, а равновесие, как нам известно, устойчиво, т.е. все коэффициенты устойчивости отрицательны. Не все из них останутся отрицательными, когда мы встретим первую фигуру бифуркации.

Перемещаясь в направлении AH , первую бифуркацию мы встретим в точке B , где эллипсоид Маклорена мало отличается от эллипсоида Якоби. Здесь коэффициент устойчивости обратится в нуль вместе с выражением

$$\frac{R_1 S_1}{3} - \frac{R_4 S_4}{5}.$$

После точки B этот коэффициент больше не обращается в нуль; в точке¹ E обращается в нуль при смене знака другой коэффициент, в то время как первый остается положительным. Таким образом, от точки A до точки B равновесие устойчиво, а после точки B — неустойчиво.

На участке BC , напротив, имеем устойчивые эллипсоиды вплоть до точки G . В точке G один из коэффициентов обращается в нуль, а затем остается положительным. Следовательно, точки на линии BC , начиная с точки G , соответствуют фигурам неустойчивого равновесия. Заметим, что эти фигуры новы для нас и нам следует рассмотреть их устойчивость. Дело осложняется тем, что величина M для этих фигур может возрастать либо убывать.

Легко увидеть, что во всех случаях функция M проходит либо через максимум, либо через минимум. В самом деле, если эти фигуры мало отличаются от той, какую мы наблюдали в точке G , то для них верно равенство

$$\zeta = \varepsilon l M_{0,3} N_{0,3},$$

причем в самой точке G $\varepsilon = 0$. Если ε меняет знак, получаем фигуру, симметричную исходной, а величина M не изменяется. Отсюда следует, что в точке G функция M проходит либо через максимум, либо через минимум. При $M < M_G$ получаем единственную фигуру равновесия, в то время как при $M > M_G$ фигур равновесия будет три, причем одна из них устойчива. Хотя полного вычисления еще не производилось, представляется весьма вероятным, что в этом случае имеем минимум функции [22].

¹В этой точке E происходит бифуркация сфероида в неэллипсоидальную фигуру, в экваториальной плоскости которой круглое сечение деформируется в подобие треугольника.

Закключение. Рассмотрим здесь два предположения. Первое — имеется вращающаяся однородная масса жидкости, подверженная охлаждению, достаточно медленному для того, чтобы оно распространилось на весь объем. Второе предположение заключается в том, что данная масса вращается как единое целое, т. е. что трение достаточно велико.

Скорость вращения не постоянна; постоянна, согласно теореме площадей, величина $\mu = \omega^2 J$. Объем T должен уменьшаться, так как тело охлаждается, следовательно, M увеличивается. Фигуры остаются в устойчивом равновесии до точки B ; после нее те, что сохранили устойчивость, являются эллипсоидами Якоби, и остаются такими до точки G . При дальнейшем охлаждении эллипсоиды Якоби перестают существовать, поскольку теряют устойчивость. Если M_G является максимумом функции, то из другой серии фигур ни одна не будет устойчивой, и тело рассеется в пространстве. И наоборот, если M_G — минимум функции, то мы получим нечто вроде ущемленного овала¹, разделенного этим ущемлением на две неравные части.

Мы не производили окончательных вычислений, направленных на то, чтобы выяснить, к чему приведет такое ущемление и сможет ли оно усиливаться настолько, что фигура разделится на два отдельных тела². Заметим, что к этому случаю нельзя непосредственно применить гипотезу Лапласа, так как масса туманности, которую рассматривал Лаплас, не однородна, а, напротив, сильно сконденсирована в ее центре.

Как бы то ни было, до настоящего времени неизвестно, соответствует точка G максимуму или же минимуму функции M .³

¹Под этим имеется в виду все та же грушевидная фигура.

²О невозможности деления груши см. наше Предисловие.

³Об уменьшении углового момента при бифуркации в этой точке см. комментарий [22].

ГЛАВА 8

КОЛЬЦО САТУРНА

Изучение кольцевых фигур равновесия. Относительно природы кольца Сатурна можно выдвинуть три гипотезы: оно либо целиком твердое, либо жидкое, либо состоит из отдельных твердых элементов. Последняя гипотеза, известная как гипотеза Кассини, представляется нам наиболее правдоподобной.¹

ГИПОТЕЗА ТВЕРДОГО КОЛЬЦА

Историческая справка. Эта гипотеза была впервые исследована Лапласом. Он выдвинул замечание, что если бы кольцо было однородным, то его движение не могло бы быть устойчивым. Стоит только его центру сместиться в сторону от центра тяжести планеты, притяжение Сатурна усилит аномалию и кольцо стремительно обрушится вниз. Следовательно, если кольцо твердое, оно должно было бы иметь неправильную форму. Лаплас не потрудился определить порядок величины требуемых нерегулярностей, это сделал Максвелл; согласно его вычислениям, они должны быть весьма значительными, причем настолько значительными, что данная гипотеза становится неприемлемой.

Уравнения движения. Среди сил, приложенных к кольцу, нам нет нужды рассматривать силы притяжения кольца на самого себя, так как различные части твердого тела не подвержены относительному смещению. Следовательно, необходимо учитывать только притяжение Сатурна и других небесных тел, однако последним можно пренебречь.

Предположим, что геометрический центр кольца находится в центре O планеты — наблюдения показывают, что так оно и есть, — а центр тяжести G кольца отличен от O . Поскольку мы не говорим о внутренних силах взаимного притяжения, точка M кольца подвержена действию силы притяжения только Сатурна. Совокупность сил притяжения,

¹Сейчас мы, конечно, не сомневаемся в дискретной природе колец Сатурна и других больших планет.

таким образом, уравнивает силу инерции. На точку M действуют сила притяжения Сатурна и центробежная сила. Если положение геометрического центра кольца неизменно, то и сила притяжения, и центробежная сила являются постоянными; в этом случае точка M вращается с некоторой скоростью, равной скорости спутника, помещенного на том же расстоянии от центра планеты — это условие является необходимым и достаточным условием равновесия. Если кольцо однородно, то это условие не является необходимым, так как скорость вращения может быть в этом случае какой угодно; на каждую из точек кольца действует одинаковая сила, и при любой скорости вращения имеет место равновесие. Таким образом, в общем случае центр тяжести G описывает при равномерном движении окружность вокруг Сатурна.

Примем за единицу длины радиус кольца, за единицу массы — массу кольца; в этом случае момент инерции кольца по отношению к его геометрическому центру будет равен единице. Остается определить единицу времени: можно подобрать ее таким образом, чтобы, обозначив массу Сатурна через M , а гравитационную постоянную через f , мы получили бы $fM = 1$.

Рассмотрим движение тонкого кольца. Пусть x и y — координаты центра тяжести. Обозначив плотность линейного элемента дуги ds кольца через ρ , имеем

$$x \int \rho ds = \int \rho \cos s ds, \quad y \int \rho ds = \int \rho \sin s ds.$$

Масса кольца равна

$$\int \rho ds.$$

Уравнения движения центра тяжести имеют вид

$$\frac{d^2 x}{dt^2} \int \rho ds = \int \rho \cos s ds = x \int \rho ds,$$

откуда

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = x, \quad \frac{d^2 y}{dt^2} = y.$$

Подобрав удобное начало отсчета времени, можем записать решения этих уравнений как

$$x = \alpha \cos t, \quad y = \beta \sin t.$$

Таким образом, в общем случае точка G описывает эллипс. Если точка описывает окружность, то ее угловая скорость, т.е. скорость спутника, помещенного на единичное расстояние от центра планеты, равна единице; в этом случае $\alpha = \beta$.

Устойчивость движения. Теперь нам следует выяснить, является ли данное движение устойчивым. Полагая массу кольца пренебрежимо малой по сравнению с массой Сатурна, мы можем допустить, что Сатурн неподвижен.

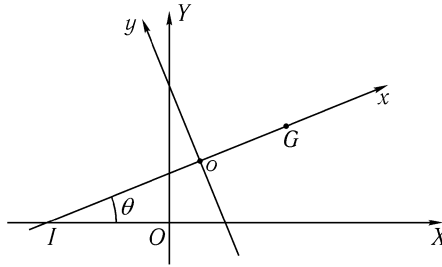


Рис. 33

Проведем через центр O Сатурна две неподвижные оси OX и OY (рис. 33), а через геометрический центр кольца проведем оси ox и oy , жестко связанные с кольцом; их положение, а значит, и положение кольца, будет определено, если даны координаты x и y точки O относительно системы координат xoy и угол θ между осями ox и OX .

Пусть G — центр тяжести кольца; можно предположить, он находится на оси ox . Величина $a = OG$ является заданной, а координаты X и Y центра тяжести равны

$$X = -y \sin \theta + (a - x) \cos \theta, \quad Y = y \cos \theta + (a - x) \sin \theta.$$

Живая сила кольца равна сумме живой силы перемещения $\frac{M}{2}(X'^2 + Y'^2)$ и живой силы вращения $J\theta'^2$. Момент инерции по отношению к точке o задан соотношением $I = J + a^2$. Таким образом, живая сила является функцией от переменных x, y, θ и их производных, и имеет место равенство

$$X'^2 + Y'^2 = x'^2 + y'^2 + \theta'^2[y^2 + (a - x)^2] - 2\theta'[x'y + (a - x)y'].$$

Потенциальная энергия имеет вид

$$U = -fMV,$$

где V — потенциал сил притяжения кольца к центру тяжести, и, поскольку

$$fM = 1,$$

получим

$$U = -V.$$

Допустим, что плотность кольца является функцией, разложимой в ряд Фурье. Если $d\psi$ — это угол, под которым мы видим линейный элемент из центра кольца, то, обозначив плотность в точке, определенной углом ψ , через ρ , получим

$$\rho = \rho_0 \left[1 + 2a \cos \psi + \frac{2\alpha}{3} \cos 2\psi + \frac{2\beta}{3} \sin 2\psi + \dots \right].$$

Обозначив координаты точки кольца относительно системы подвижных осей через ξ и η , запишем

$$\begin{aligned} \int \rho ds &= 1, & \int \rho \xi ds &= a, & \int \rho \eta ds &= 0, \\ \int \rho(\xi^2 + \eta^2) ds &= \int \rho ds = 1. \end{aligned}$$

Найдем также

$$\begin{aligned} \int \rho(\xi^2 - \eta^2) ds &= \int_0^{2\pi} \rho \cos 2\psi d\psi = \frac{\alpha}{3}, \\ \int \rho \xi \eta ds &= \int_0^{2\pi} \rho \sin 2\psi d\psi = \frac{\beta}{3}. \end{aligned}$$

Как мы уже видели, производя вычисления, потенциал в точке G , создаваемый силой притяжения кольца Сатурном, имеет вид

$$\int \frac{\rho ds}{r} V = -U = 1 + ax + \frac{x'^2 + y'^2}{4} + \beta xy + \frac{\alpha}{4}(x^2 - y^2) + \dots$$

Уравнения Лагранжа дают

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial q'} \right) - \frac{\partial T}{\partial q} + \frac{\partial U}{\partial q} = 0,$$

но, так как U не зависит от q' , имеем

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial(T - U)}{\partial q'} - \frac{\partial(T - U)}{\partial q} = 0.$$

Можно записать

$$T - U = \frac{A\theta'^2 + 2B\theta' + C}{2} + V,$$

где

$$A = J + y^2 + (a - x)^2, \quad B = -x'y + y'(a - x), \quad C = x'^2 + y'^2;$$

заметим, что значение разности $T - U$ не зависит от θ . Таким образом, из первого уравнения Лагранжа получим

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial(T - U)}{\partial \theta'} \right] = 0$$

или, поскольку U не зависит от θ ,

$$\frac{dT}{d\theta'} = p,$$

где p — константа. Эту константу, впрочем, легко вычислить при заданных начальных условиях. Разложив предыдущее уравнение, можно записать

$$A\theta' + B = p.$$

Положив $x_0 = 0$, $y_0 = 0$ и, как следствие, очень малые x'_0 и y'_0 , получим

$$A_0 = 1, \quad B_0 = 0;$$

отсюда $p = \theta'_0$ — скорость вращения кольца, которое, по предположению, находится в равновесии. Как было доказано выше, $\theta'_0 = 1$, значит, и $p = 1$. Полученное уравнение представляет собой уравнение площадей.

Преобразуем теперь уравнения Лагранжа. Положим

$$H = T - U - p\theta'.$$

При замене разности $T - U$ на H уравнения Лагранжа сохраняют свою форму; так как, если q является одной из переменных, имеет место соотношение

$$\frac{\partial H}{\partial q} = \frac{\partial(T - U)}{\partial q} + \frac{\partial T}{\partial \theta'} \frac{\partial \theta'}{\partial q} - p \frac{\partial \theta'}{\partial q},$$

а поскольку

$$p = \frac{\partial T}{\partial \theta'},$$

то в итоге получаем

$$\frac{\partial H}{\partial q} = \frac{\partial(T - U)}{\partial q}.$$

Аналогично

$$\frac{\partial H}{\partial q'} = \frac{\partial(T - U)}{\partial q'}.$$

Мы можем исключить величину θ' из уравнений, подставив вместо нее

$$\frac{p - B}{A},$$

и так как ни T , ни U не содержат θ , то функция H перестает быть функцией от переменных x и y и их производных и принимает вид

$$H = -\frac{(p - B)^2}{2A} + \frac{C}{2} - V.$$

Допустим теперь, что центр кольца находится очень близко к центру Сатурна, т. е. что x и y малы, и посмотрим, останутся ли они малыми при последующем движении.

Членами нулевой степени в составе уравнения функции H можно пренебречь, так как они не входят в уравнения Лагранжа. Члены первого порядка по x и y должны сократиться; в самом деле, в уравнениях Лагранжа такие члены становятся постоянными, и поэтому эти уравнения должны иметь решения $x = 0$ и $y = 0$. Что касается членов

первого порядка по x' и y' , то они в уравнениях Лагранжа сокращаются. Таким образом, остаются только члены второго порядка, которые мы обозначим через W ; членами более высоких степеней также можно пренебречь.

Разложим функцию H , сохраняя только члены второго порядка. Получим для W следующее выражение:

$$Ex^2 + 2Cxy + Fy^2 + \frac{x'^2}{2} + \frac{1-a^2}{2}y'^2 - x'y + (1-2a^2)xy',$$

где

$$E = \frac{3}{4} - 2a^2 + \frac{\alpha}{4}, \quad C = \frac{\beta}{4}, \quad F = \frac{3}{4} + \frac{\alpha}{4}.$$

Как уже было замечено, уравнения Лагранжа можно свести к виду

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial W}{\partial x'} = \frac{\partial W}{\partial x}, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial W}{\partial y'} = \frac{\partial W}{\partial y};$$

т. е.

$$\begin{aligned} x'' - 2(1-a^2)y' &= 2Ex + 2Cy, \\ (1-a^2)y'' + 2(1-a^2)x' &= 2Cx + 2Fy. \end{aligned}$$

Для того чтобы проинтегрировать эти линейные уравнения с постоянными коэффициентами, положим прежде

$$x = x_0 e^{i\omega t}, \quad y = y_0 e^{i\omega t}.$$

Получим четыре возможных значения для ω , а общее уравнение движения запишется как

$$\begin{aligned} x &= l_1 e^{i\omega_1 t} + l_2 e^{i\omega_2 t} + l_3 e^{i\omega_3 t} + l_4 e^{i\omega_4 t}, \\ y &= m_1 e^{i\omega_1 t} + m_2 e^{i\omega_2 t} + m_3 e^{i\omega_3 t} + m_4 e^{i\omega_4 t}, \end{aligned}$$

где l и m — некоторые константы, определяемые из начальных условий. Для того чтобы движение было устойчивым при каких угодно условиях, значения ω должны быть, в частности, вещественными отрицательными либо нулевыми.

Для определения ω заменим x и y в дифференциальных уравнениях и получим

$$\begin{aligned} \omega^2 x - 2(1-a^2)\omega y &= 2Ex + 2Cy, \\ (1-a^2)\omega^2 y + 2(1-a^2)\omega x &= 2Cx + 2Fy. \end{aligned}$$

Можно исключить x и y ; в итоге имеем

$$\omega^4(1 - a^2) + \omega^2\left(-1 + \frac{5a^2}{2} + \frac{a^2\alpha}{2}\right) + \frac{1}{4}(9 - \alpha^2 - \beta^2 - 24a^2 + 8a^2\alpha) = 0.$$

Это уравнение для ω^2 должно иметь вещественные корни, так как если оба решения уравнения мнимые, то их квадратные корни не будут чисто мнимыми величинами. Вследствие этого, учитывая, что они равны, но противоположны по знаку, один из корней уравнения будет, в частности, вещественным и положительным.¹

С другой стороны, в случае однородного кольца

$$a = \alpha = \beta = 0,$$

а значит, уравнение сводится к виду

$$\omega^4 - \omega^2 + \frac{9}{4} = 0.$$

Корни этого уравнения суть мнимые величины; они останутся мнимыми и в том случае, если a , α и β находятся в окрестности нуля. Отсюда следует, что величины a , α и β должны быть большими, т.е. что неправильность формы кольца весьма значительна, а ее видимая правильность ничем не объяснима.

Максвелл произвел вычисления, исходя из предположения, что кольцо однородно везде, за исключением одной точки, где присутствует некоторая дополнительная масса, и обнаружил, что эта масса должна составлять не менее чем $\frac{4}{5}$ общей массы кольца, т.е. что

$$a > 0,8.$$

Радо исследовал случай кольца, плотность которого изменялась бы от точки к точке, и нашел, что эта плотность должна была бы тогда меняться в интервале от 2,7 до 0,04, что маловероятно.

К тому же, если какая-либо часть кольца тоньше других, она должна иметь бóльшую жесткость, чтобы противостоять притяжению спутников. Гирн вычислил, что коэффициент жесткости кольца должен быть в тысячу раз больше коэффициента жесткости стали. Следовательно, *кольцо Сатурна не является твердым.*

¹Из самого дисперсионного уравнения это утверждение еще не следует. Для положительности одного из корней необходимости равенства корней по модулю нет.

ГИПОТЕЗА ЖИДКОГО КОЛЬЦА

Потенциал однородной окружности. Найдем потенциал, создаваемый однородной окружностью в точке P пространства. Пусть $PA = a$ и $PB = b$ — наименьшее и наибольшее расстояние от точки P до окружности. Поскольку дан радиус R окружности, величины a и b полностью определяют потенциал.

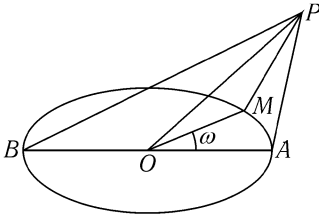


Рис. 34

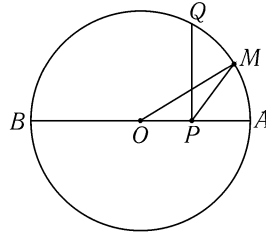


Рис. 35

Обозначим угол AOM (рис. 34) через ω . Тогда

$$\overline{PM}^2 = a^2 \cos^2 \frac{\omega}{2} + b^2 \sin^2 \frac{\omega}{2},$$

а потенциал

$$V_p = \int_0^{2\pi} \frac{\mu R d\omega}{PM} = M \int_0^{2\pi} \frac{d\omega}{2\pi \times PM} = M\varphi(a, b).$$

Поскольку потенциал зависит только от a , b и массы окружности, вспомним, как вычисляется потенциал V , создаваемый окружностью в точке, лежащей на той же плоскости. Опишем окружность диаметра $(a+b)$ и вычислим потенциал этой окружности в точке, расположенной на расстоянии a от одной из конечных точек диаметра (рис. 35).

Потенциал в точке P определяется из той же формулы; имеем

$$V = M \int_0^{2\pi} \frac{d\omega}{2\pi \sqrt{a^2 \cos^2 \frac{\omega}{2} + b^2 \sin^2 \frac{\omega}{2}}},$$

кроме того,

$$V = M \int_0^{2\pi} \frac{d\psi}{2\pi \sqrt{OA^2 \cos^2 \psi + \overline{QP}^2 \sin^2 \psi}},$$

где Q — точка на окружности, проекция которой на диаметр AB пересекает его в точке P , а ψ — угол $АОМ$. Отсюда имеем

$$\begin{aligned}\varphi(a, b) &= \varphi(OA, QP), \\ \varphi(a, b) &= \varphi\left(\frac{a+b}{2}, \sqrt{ab}\right).\end{aligned}$$

Запишем теперь последовательность значений

$$\begin{array}{cc} a & b \\ a_1 & b_1 \\ \vdots & \vdots \\ a_n & b_n \end{array}$$

таких, что

$$a_n = \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2}, \quad b_n = \sqrt{a_{n-1} b_{n-1}};$$

в итоге получим

$$V = M\varphi(a_n, b_n),$$

и это верно при любом целом n . Легко доказать, что a_n и b_n стремятся к одному пределу, который мы назовем средним арифметико-геометрическим величин a и b .

Обозначим этот предел через m . Тогда

$$V = M \int_0^{2\pi} \frac{d\psi}{2\pi \sqrt{m^2 \cos^2 \frac{\psi}{2} + m^2 \sin^2 \frac{\psi}{2}}} = M \int_0^{2\pi} \frac{d\psi}{2\pi m} = \frac{M}{m}.$$

Функция $\varphi(a, b)$ представляет собой однородную функцию степени -1 от a и b , т.е. верно равенство

$$\varphi(\lambda a, \lambda b) = \lambda^{-1} \varphi(a, b);$$

следовательно, можно записать

$$\varphi(a, b) = \frac{1}{b} \varphi\left(\frac{a}{b}, 1\right).$$

Заменяя $\varphi(a, 1)$ на $\varphi(a)$, получим

$$\varphi(a, b) = \frac{1}{b} \varphi\left(\frac{a}{b}\right).$$

Какой вид примет формула, если P приближается к окружности, т.е. величина a становится очень малой? Обозначив неперов логарифм через \ln , получим

$$V = 2\mu_0 \ln \frac{K}{\rho} + \varepsilon,$$

где ρ — расстояние от точки P до ближайшей к ней точки окружности P_0 , ε — некоторая величина, стремящаяся к нулю вместе с ρ , μ_0 и K — константы, не зависящие от положения точки P по отношению к точке P_0 , равно как и от положения точки P_0 на окружности.

Возобновляя предшествующие рассуждения, запишем

$$V = 2\mu_0 \ln \frac{K}{a},$$

а поскольку

$$M = 2\pi\mu_0 R,$$

имеем

$$\frac{V}{M} = \frac{1}{\pi R} \ln \frac{K}{a}.$$

Величина b мало отличается от $2R$ согласно принятому порядку приближений; впрочем,

$$\frac{V}{M} = \varphi(a, b).$$

Это соотношение позволяет вычислить постоянную K . В самом деле, имеем

$$\varphi(a, b) = \varphi\left(\sqrt{ab}, \frac{a+b}{2}\right) = \frac{2}{a+b} \varphi\left(\frac{2\sqrt{ab}}{a+b}\right);$$

положим $b = 1$, тогда уравнение сводится к виду

$$\varphi(a) = \frac{2}{1+a} \varphi\left(\frac{2\sqrt{a}}{1+a}\right).$$

В нашем случае, когда a пренебрежимо мало по сравнению с единицей,

$$\varphi(a) = 2\varphi(2\sqrt{a});$$

с другой стороны,

$$\varphi(a) = \ln \frac{K}{a}.$$

Следовательно,

$$\ln \left(\frac{K}{a} \right) = 2 \ln \left(\frac{K}{2\sqrt{a}} \right),$$

$$\ln K - \ln a = 2 \ln K - 2 \log 2 - \ln a,$$

откуда заключаем, что

$$\ln K = 2 \ln 2,$$

$$K = 4,$$

и, наконец,

$$\frac{V}{M} = \frac{2}{\pi} \ln \frac{4}{a}$$

в принятом приближении.

Можно отыскать более точное выражение для $\varphi(a)$. Положим

$$\varphi(a) = \frac{2}{\pi} \lg \frac{4}{a} [1 + A_1 a + A_2 a^2 + \dots] + \frac{2}{\pi} [B_0 + B_1 a + B_2 a^2 + \dots];$$

воспользовавшись соотношением

$$\varphi(a) = \frac{2}{1+a} \varphi \left(\frac{2\sqrt{a}}{1+a} \right),$$

легко находим

$$\begin{cases} A_1 = 0, & B_0 = B_1 = 0, \\ A_2 = \frac{1}{4}, & B_2 = -\frac{1}{4} \ln 2 \end{cases}$$

с тем, чтобы можно было взять вместо $\varphi(a)$ функцию

$$\frac{2}{\pi} \lg \frac{4}{a},$$

пренебрегая при этом только слагаемыми, содержащими $\frac{1}{a^2}$.

Кольцеобразное тело вращения. Обозначим центр тяжести меридионального сечения кольца через G и проведем прямую Gy параллельно оси вращения, а также прямую Gx в меридианной плоскости, перпендикулярно Gy и так, чтобы положительным было направление от оси вращения к точке G ; расстояние от оси вращения до точки G обозначим через l . Элемент поверхности меридионального сечения $d\sigma'$ с плотностью ρ' и координатами x' и y' образует при вращении кольцо, масса которого равна

$$2\pi\rho'(l+x')d\sigma'.$$

Найдем потенциал этого кольца в точке P с координатами x и y , лежащей в меридиональной плоскости. Прежде всего необходимо вычислить значения a и b . Предположив, что точка P находится с той же стороны от оси вращения, что и элемент $d\sigma$, запишем

$$a = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2},$$

$$b = \sqrt{(2l+x'+x)^2 + (y-y')^2}.$$

Допустим, что толщина кольца незначительна, а точка P расположена рядом с G , так что величины x , y , x' , y' пренебрежимо малы по сравнению с l . Тогда a — величина того же порядка, а b приблизительно равно

$$2l + x + x',$$

поскольку величина $(y-y')^2$ пренебрежимо мала.

Вычислим теперь $\varphi(a, b)$. Имеем

$$\varphi(a, b) = \frac{1}{b}\varphi\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{1}{2l+x+x'}\ln\frac{4b}{a}.$$

Тогда потенциал в точке P имеет вид

$$V = \frac{4\rho' d\sigma'(l+x')}{b}\ln\frac{4b}{a}.$$

Имеем

$$\frac{l+x'}{b} = \frac{l+x'}{2l+x+x'};$$

так как, согласно предположению, x и x' малы, можно приближенно записать

$$\frac{l+x'}{b} = \frac{1}{2}\left[1 + \frac{x'-x}{2l}\right].$$

Отсюда

$$\ln \frac{4b}{a} = \ln \frac{8l}{a} + \ln \frac{b}{2l}, \quad \ln \frac{b}{2l} = \ln \left[1 + \frac{x' + x}{2l} \right];$$

в принятом приближении последнее равенство можно записать как

$$\ln \frac{b}{2l} = \frac{x' + x}{2l}.$$

Тогда

$$V = d\sigma' \cdot 2\rho' \left[1 + \frac{x' - x}{2l} \right] \left[\ln \frac{8l}{a} + \frac{x' + x}{2l} \right].$$

Таким образом, потенциал кольца равен

$$\int 2\rho' \ln \frac{8l}{a} d\sigma' + \int \frac{x' - x}{l} \rho' \ln \frac{8l}{a} d\sigma' + \int \frac{x' + x}{l} \rho' d\sigma';$$

остальные слагаемые пренебрежимо малы, интегралы берутся по поверхности сечения. Предположим, что кольцо однородно, и положим $\rho' = 1$.

Два первых члена представляют собой логарифмические потенциалы, которые играют в притяжении плоских масс ту же роль, что ньютоновские потенциалы играют в притяжении объемных тел. Свойства логарифмического потенциала на плоскости аналогичны свойствам ньютоновского потенциала в пространстве. Докажем, например, что логарифмический потенциал однородного круга останется неизменным даже в том случае, если вся его масса будет сосредоточена в центре.

Если точка P расположена на поверхности тора на расстоянии a_0 от центра образующей окружности, достаточно рассмотреть логарифмический потенциал в точке P , создаваемый кругом радиуса a_0 . Площадь его поверхности равна πa_0^2 , а потенциал —

$$\pi a_0^2 \ln \frac{8l}{a_0}.$$

Следовательно, первый интеграл равен

$$2\pi a_0^2 \ln \frac{8l}{a_0};$$

второй представляет собой сумму двух интегралов

$$\int \frac{x'}{l} \ln \frac{8l}{a} d\sigma' - \int \frac{x}{l} \ln \frac{8l}{a} d\sigma,$$

последний из которых может быть вычислен непосредственно. Он равен

$$\frac{x}{l} \pi a_0^2 \ln \frac{8l}{a_0}.$$

Первый интеграл мы вычислим позже.

В то же время, поскольку центр тяжести находится в начале координат, имеем

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{l} d\sigma' &= \frac{x}{l} \int d\sigma' = \frac{x}{l} \pi a_0^2, \\ \int \frac{x'}{l} d\sigma' &= \frac{1}{l} \int x' d\sigma' = 0. \end{aligned}$$

Остается вычислить интеграл

$$\int \frac{x'}{l} \ln \frac{8l}{a} d\sigma.$$

Воспользуемся способом, который мы уже применяли в другом случае. Предположим, что плотность круга равна

$$\frac{a_0^2}{2} - \frac{x'^2 + y'^2}{2},$$

тогда потенциал

$$U = \int \rho' d\sigma' \ln \frac{8l}{a}.$$

Плотность зависит только от расстояния до центра, потенциал же круга останется неизменным, если вся его масса будет сосредоточена в центре. Массу круга легко вычислить, она равна

$$\int \frac{a_0^2 - r^2}{2} d\sigma' = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{a_0} \frac{a_0^2 - r^2}{2} r dr = 2\pi \left[\frac{a_0^2 r^2}{4} - \frac{r^4}{8} \right]_0^{a_0} = \frac{\pi a_0^4}{4}.$$

Таким образом, потенциал в точке A , расположенной на расстоянии $a_1 > a_0$ от центра круга, равен

$$\frac{\pi a_0^4}{4} \ln \frac{8l}{a_1}.$$

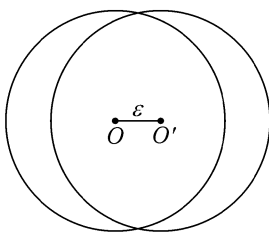


Рис. 36

Предположим, что круг C смещается на величину ε параллельно оси x и занимает новое положение C_1 (рис. 36). Потенциал в точке A будет равен

$$U + \varepsilon \frac{\partial U}{\partial x},$$

а разность потенциалов —

$$\varepsilon \frac{\partial U}{\partial x}.$$

Выясним, откуда берется эта разница. Плотность ρ' в некоторой точке внутри круга равна теперь

$$\rho' - \varepsilon \frac{\partial \rho'}{\partial x'}.$$

В области круга C' , находящейся снаружи круга C , плотность была нулевой, теперь же она равна ρ' ; эта величина мала, поскольку плотность ρ' на окружности круга C равна нулю, а площадь рассматриваемой области есть величина порядка ε . Следует еще рассмотреть область, равную вышеописанной по площади, которая находится внутри круга C и снаружи круга C' . Плотность здесь изменилась противоположным образом на величину, порядок которой также не превышает ε , так как плотность ρ' , малая на границе круга, становится в какой-либо точке этой области нулевой.

Значит, изменение потенциала, связанное с этими двумя областями, пренебрежимо мало, и верно равенство

$$\varepsilon \frac{\partial U}{\partial x} = - \int \varepsilon \frac{\partial \rho'}{\partial x'} \ln \frac{8l}{a} d\sigma'.$$

Но

$$\frac{\partial \rho'}{\partial x'} = -2x';$$

отсюда, сокращая множитель ε , получим

$$\int x' \ln \frac{8l}{a} d\sigma' = \frac{\partial U}{\partial x}.$$

Таким образом, искомый интеграл равен $\frac{\partial U}{\partial x}$ с точностью до множителя l , но $\frac{\partial U}{\partial x}$ — составляющая силы притяжения, параллельная оси Ox . Эта сила равна $\frac{1}{a_1}$, а ее составляющая по Ox равна $\frac{x}{a_1^2}$.

Отсюда

$$\int \frac{x'}{l} \ln \frac{8l}{a} d\sigma = \frac{\pi a_0^4 x}{4l} \frac{1}{a_1^2}.$$

Предположив, что точка расположена на поверхности тора, т. е. что $a_1 = a_0$, получим значение интеграла

$$\pi a_0^2 \frac{x}{4l}.$$

Следовательно, потенциал в некоторой точке на поверхности тора имеет вид

$$V = 2\pi a_0^2 \ln \frac{8l}{a_0} - \frac{x}{l} \pi a_0^2 \ln \frac{8l}{a_0} + \frac{5x}{4l} \pi a_0^2,$$

пренебрегая величинами порядка $\frac{a_0^2}{l^2}$.

Меридиональное сечение кольца. Обозначим массу Сатурна через M , скорость вращения кольца через ω . Необходимое условие равновесия на поверхности тора заключается в том, чтобы функция $U + \frac{\omega^2 R^2}{2}$ была постоянной, под U здесь подразумевается сумма собственного потенциала кольца и потенциала, создаваемого Сатурном; последний может быть выражен в принятом приближении как $\frac{M}{l}$. Значит, на поверхности кольца должно выполняться условие

$$V + \frac{M}{l} + \frac{\omega^2 R^2}{2} = C^{\text{те}}.$$

Положим

$$R = l + x, \quad R^2 = l^2 + 2lx;$$

тогда расстояние от точки на поверхности тора до его центра

$$\rho^2 = (l + x)^2 + y^2.$$

В принятом приближении это можно записать как

$$\rho^2 = (l + x)^2,$$

откуда

$$\rho = l + x,$$

и, наконец,

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{l+x} = \frac{1}{l} - \frac{x}{l^2}.$$

Условие равновесия запишется следующим образом:

$$2\pi a_0^2 \ln \frac{8l}{a_0} - \frac{x}{l} \pi a_0^2 \ln \frac{8l}{a_0} + \frac{5x}{4l} \pi a_0^2 + \frac{M}{l} - \frac{Mx}{l^2} + \frac{\omega^2 l^2}{2} + \omega^2 lx = C^{\text{те}};$$

а значит, коэффициент при x должен быть равен нулю, т. е.

$$\frac{5\pi a_0^2}{4l} - \frac{\pi a_0^2}{l} \ln \frac{8l}{a} - \frac{M}{l^2} + \omega^2 l = 0.$$

Из этого уравнения можно определить ω^2 с точностью до величин второго порядка.

Так как величина $\frac{a_0^2}{l}$ также мала, имеем

$$\omega^2 = \frac{M}{l^3}.$$

Таким образом, скорость вращения тора, сечением которого является круг достаточно малого радиуса по сравнению с расстоянием до Сатурна, равна скорости движения спутника, помещенного на таком же расстоянии от планеты.

При отсутствии центрального тела $M = 0$. В этом случае также возможна кольцевая фигура равновесия: величина a^2 пренебрежимо мала, отношение $\frac{\omega}{\frac{a_0}{l}}$, разумеется, стремится к бесконечности при a_0 ,

стремящемся к нулю, а величина $\ln \frac{l}{a_0}$ при этом возрастает до бесконечности.

Если требуется лучшее приближение, необходимо вычислить значение суммы слагаемых вида

$$x^m y^n \int x'^m y'^n \ln \frac{8l}{a} d\sigma$$

и

$$x^m y^n \int x'^m y'^n d\sigma.$$

Предположим теперь, что сечением тора является эллипс. В этом случае нам необходимо вычислить логарифмический потенциал эллипса. Известно, что ньютоновский потенциал, создаваемый бесконечной прямой в некоторой точке, равен логарифмическому потенциалу, создаваемому в этой точке проекцией точки на прямую. Отсюда следует, что логарифмический потенциал, создаваемый эллипсом в точке, лежащей в его плоскости, равен ньютоновскому потенциалу цилиндра, длинного по сравнению с его поперечным сечением, в точке, расположенной на малом расстоянии от его поверхности. Таким образом, задача сводится к вычислению потенциала очень вытянутого эллипсоида, для которого величина c^2 предполагается бесконечной.

Внутренний потенциал выражается функцией второго порядка

$$V = Ax^2 + By^2,$$

коэффициенты которой легко вычисляются (стр. 136).

Потенциал же снаружи имеет вид

$$V = A_0 + A_1x + A_2x^2 + A_3y^2 + \dots$$

Можно вычислить A_0 , A_1 , A_2 , как мы делали это ранее, только интегралы следует брать по площади эллипса, уравнение которого

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Величинами третьего порядка можно пренебречь. Силовую функцию можно также разложить в ряд вида

$$C_0 + C_1x + C_2x^2 + C_3y^2.$$

Условие равновесия для поверхности эллипса выглядит следующим образом:

$$(A_1 + C_1)x + (A_2 + C_2)x^2 + (A_3 + C_3)y^2 = C^{\text{те}},$$

а значит, должны выполняться равенства

$$A_1 + C_1 = 0, \quad (A_2 + C_2)a^2 = (A_3 + C_3)b^2.$$

Лаплас исследовал это уравнение и произвел вычисления без учета членов A_2 и A_3 .

Ковалевская сделала больше и показала, что меридиональное сечение тора не симметрично относительно оси y .

Вопрос об устойчивости мы изучим позже, а сейчас рассмотрим гипотезу Кассини.

ГИПОТЕЗА КАССИНИ

Правдоподобность гипотезы Кассини. Из трех гипотез лишь гипотеза Кассини согласуется с трудами Максвелла о кольце Сатурна. Наблюдения также подтверждают эту гипотезу — кольцо прозрачно для света и не вызывает преломления. Следует, очевидно, предположить, что кольцо состоит из твердых (либо жидких) частиц, отделенных друг от друга. К тому же, спектроскопические наблюдения показывают, что скорость отдельной частицы кольца не постоянна ни на внешнем, ни на внутреннем его крае.

Уравнения движения. Начнем с изучения самого простого случая. Рассмотрим p спутников одинаковой массы μ , расположенных по кругу на равных расстояниях друг от друга; расстояние между двумя спутниками $\frac{2\pi}{p} = 2\theta$, отношение $\frac{\mu}{\theta}$ не является бесконечно большим.

Один из возможных вариантов движения такой системы состоит в том, что каждый спутник равномерно движется по окружности со скоростью ω , определяемой притяжением планеты и других спутников.¹ Выясним, возможно ли движение, близкое к вышеописанному.

Пусть M_k — спутник, занимающий положение k , его радиус-вектор равен $1 + \rho_k$, а полярный угол составляет $\omega t + 2k\theta + \sigma_k$. При невозмущенном движении

$$\rho_k = 0, \quad \sigma_k = 0;$$

при устойчивом движении величина ρ_k должна оставаться малой.

Живая сила T и силовая функция U суть функции от ρ_k и σ_k ; уравнения Лагранжа дают следующие равенства:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \sigma'_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial \sigma_k} + \frac{\partial U}{\partial \sigma_k} = 0, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \rho'_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial \rho_k} + \frac{\partial U}{\partial \rho_k} = 0.$$

Положив

$$T - U = H,$$

¹Такие симметричные конфигурации называются центральными.

получим

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial H}{\partial \rho'_k} - \frac{\partial H}{\partial \rho_k} = 0.$$

Можно предположить, что Сатурн неподвижен; иными словами, мы не будем рассматривать возмущения в движении спутников, вызванные движением Сатурна. Таким образом, постановка уравнения задачи не зависит от движения Сатурна.

Живая сила системы имеет вид

$$T = \sum \frac{\mu}{2} [\rho'_k{}^2 + (1 + \rho_k)^2 (\omega + \sigma'_k)^2],$$

или, пренебрегая бесконечно малыми величинами третьего порядка,

$$T = \sum \frac{\mu}{2} [\rho'_k{}^2 + \omega^2 + 2\omega^2 \rho_k + \omega^2 \rho_k^2 + 2\omega \sigma'_k{}^2 + \sigma'_k{}^2 + 4\rho'_k \sigma'_k].$$

Силовая функция имеет вид

$$U = \sum \frac{\mu}{(1 + \rho_k)} + \mu^2 R,$$

где R — дополнительный потенциал, связанный с притяжением спутников друг к другу. Положим

$$\psi = (k - h)\theta;$$

тогда

$$\begin{aligned} R = \sum \frac{1}{2 \sin \psi} \left\{ 1 - \frac{\rho_h + \rho_k}{2} + \frac{(\rho_h + \rho_k)^2}{4} - \frac{(\rho_h - \rho_k)^2}{8} \operatorname{ctg}^2 \psi + \right. \\ \left. + (\rho_h + \rho_k) \frac{\sigma_h - \sigma_k}{4} \operatorname{ctg} \psi + \frac{(\sigma_k - \sigma_h)}{2} \operatorname{ctg} \psi + \right. \\ \left. + \frac{(\sigma_k - \sigma_h)^2}{8} (1 + 2 \operatorname{ctg}^2 \psi) + \dots \right\}, \end{aligned}$$

опущенные слагаемые пренебрежимо малы. Также можно записать

$$\frac{\mu}{1 + \rho_k} = \mu(1 - \rho_k + \rho_k^2).$$

Наиболее важными членами в потенциале R являются, разумеется, те, для которых угол ψ мал. При этом $\sin \psi$ есть бесконечно малая величина первого порядка, $\frac{\operatorname{ctg} \psi}{\sin \psi}$ — бесконечно большая величина второго порядка, а $\frac{\operatorname{ctg}^2 \psi}{\sin \psi}$ — бесконечно большая величина третьего порядка.

Как мы знаем, функции U и T не зависят от t и являются функциями второго порядка относительно переменных ρ , ρ' , σ и σ' ; производные $\frac{\partial T}{\partial \sigma}$, $\frac{\partial T}{\partial \sigma'}$ являются функциями первого порядка относительно этих переменных; наконец, производная $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \sigma'} \right)$ является функцией первого порядка со вторыми производными. Таким образом, уравнения Лагранжа суть уравнения с постоянными коэффициентами вида

$$A + B(\rho, \rho', \rho''; \sigma, \sigma', \sigma'') = 0,$$

где A — константа, а B — линейная функция от указанных аргументов. Однако эти уравнения должны иметь решение $\rho = \sigma = 0$, а значит, коэффициент A должен сокращаться. Тогда уравнения становятся линейными и однородными и их решения выражаются через экспоненты; имеет место равенство

$$\rho = \sum \alpha e^{\lambda t},$$

где λ — корни алгебраических уравнений, а α — постоянные.

Движение будет устойчивым, если ρ не возрастает дальше некоторого предела. Запишем λ в виде

$$\lambda = \lambda_0 + i\lambda_1.$$

Движение будет устойчивым, если число λ_0 отрицательно или равно нулю; и если доказать, что корни уравнения для λ попарно равны по модулю, но имеют противоположные знаки, то мы увидим, что λ_0 может иметь только нулевое значение. С другой стороны, если заменить t на $-t$, то уравнения не изменятся, так как в уравнения Лагранжа входят только члены второго порядка. Отсюда следует, что если уравнение для λ имеет один корень, то оно также имеет и другой корень противоположного знака, а значит, необходимое условие устойчивости равновесия заключается в том, чтобы корни уравнения для λ были исключительно мнимыми числами. Разумеется, это условие также и достаточно, так как в данном случае ρ выражается через тригонометрические функции от вещественной переменной t .

Имеем $2p$ уравнений второго порядка, следовательно, λ удовлетворяет одному алгебраическому уравнению порядка $4p$, т.е. уравнению для λ^2 порядка $2p$, все корни которого вещественны и отрицательны.

Первые из уравнений Лагранжа имеют вид

$$\rho_k'' - \omega^2(1 + \rho_k) - 2\omega\sigma_k' + 1 - 2\rho_k = \mu \left(\frac{\partial R}{\partial \rho_k} \right).$$

Внутренний потенциал R представим в виде суммы членов нулевого, первого и второго порядка —

$$R = R_0 + R_1 + R_2$$

или

$$\mu \frac{\partial R}{\partial \rho_k} = \mu \frac{\partial R_1}{\partial \rho_k} + \mu \frac{\partial R_2}{\partial \rho_k},$$

где $\frac{\partial R_1}{\partial \rho_k}$ — постоянная, а $\frac{\partial R_2}{\partial \rho_k}$ — линейная функция.

Вторые уравнения Лагранжа имеют вид

$$\sigma_k'' + 2\omega\rho_k' = \mu \frac{\partial R_1}{\partial \sigma_k} + \mu \frac{\partial R_2}{\partial \sigma_k}.$$

Постоянные члены в первом уравнении должны сократиться; исходя из этого, имеем

$$\omega^2 - 1 = -\mu \frac{\partial R_1}{\partial \rho_k} = -\frac{\mu}{4} \sum \frac{1}{\sin \psi},$$

где ψ принимает значения $\theta, 2\theta, 3\theta, \dots, (p-1)\theta$. В случае $\mu = 0$ получим $\omega^2 = 1$.

Таким образом, уравнения имеют вид

$$\rho_k'' - 2\omega\sigma_k' - (\omega^2 + 2)\rho_k = \mu \frac{\partial R_2}{\partial \rho_k}, \quad \sigma_k'' - 2\omega\rho_k' = \mu \frac{\partial R}{\partial \sigma_k}.$$

Замена переменных. Произведем замену переменных

$$\rho_k = \sum \xi_\gamma e^{2ik\gamma\theta}, \quad \gamma = 1, 2, \dots, p.$$

Запишем, например,

$$\rho_1 = \xi_1 e^{2i\theta} + \xi_2 e^{4i\theta} + \xi_3 e^{6i\theta} + \dots,$$

$$\rho_2 = \xi_1 e^{4i\theta} + \xi_2 e^{8i\theta} + \xi_3 e^{12i\theta} + \dots$$

Аналогично положим

$$\sigma_k = \sum \eta_\gamma e^{2ik\gamma\theta}.$$

Коэффициенты ξ_γ , с одной стороны, и η_γ , с другой, суть попарно сопряженные мнимые числа. Выражаясь более точно, скажем, что сопряженными мнимыми являются числа ξ_γ и $\xi_{p-\gamma}$. В самом деле, можно записать

$$\rho_k = \sum \xi_{p-\gamma} e^{2ik(p-\gamma)\theta} = \sum \xi_{p-\gamma} e^{-2ik\gamma\theta}.$$

Второе выражение для ρ_k выводится из первого путем замены i на $-i$ и ξ_γ на $\xi_{p-\gamma}$. Следовательно, $\xi_{p-\gamma}$ должно выводиться из ξ_γ с помощью замены i на $-i$; значит, ξ_γ и $\xi_{p-\gamma}$ являются сопряженными мнимыми числами. Аналогично можно доказать, что коэффициенты η_γ и $\eta_{p-\gamma}$ также являются сопряженными мнимыми числами. При четном p число $\xi_{\frac{p}{2}}$ вещественно, так как оно является сопряженным к самому себе.

Функция $\left(\frac{d\rho_k}{dt}\right)^2$ представляет собой полином второго порядка по ξ'_γ , который содержит только члены вида ξ'_γ , $\xi'_{p-\gamma}$. В самом деле, функции T и R симметричны относительно ρ_k и σ_k . Если поменять местами ρ_k и σ_k , т.е. заменить ξ_γ на $\xi_\gamma e^{2i\gamma\theta}$, то число, на которое умножится ξ'_γ , не изменится.

То же верно и для коэффициентов η_γ и η'_γ . При такой замене ни T , ни R не должны измениться. Значит, член $\xi'_\gamma \xi'_{\gamma'}$ должен преобразоваться сам в себя. Следовательно, при замене переменных следует умножить этот коэффициент на $e^{2ihp\theta}$, т.е. должно быть выполнено равенство

$$2i(\gamma + \gamma')\theta = 2ihp.$$

Отсюда

$$\gamma + \gamma' = p.$$

Рассуждая подобным образом, мы в итоге придем к тому, что функции T и R должны содержать только члены вида

$$\begin{array}{ll} \xi'_\gamma \xi'_{p-\gamma} & \eta'_\gamma \eta'_{p-\gamma} \\ \xi_\gamma \xi'_{p-\gamma} & \xi_\gamma \eta'_{p-\gamma} \\ \xi_\gamma \xi_{p-\gamma} & \xi_\gamma \eta_{p-\gamma} \\ \xi'_\gamma \eta_{p-\gamma} & \eta_\gamma \eta_{p-\gamma}. \end{array}$$

Если теперь внимательнее взглянуть на способ образования функции H , то мы увидим, что можно положить

$$H = H_1 + H_2 + \dots + H_\gamma + \dots + H_p,$$

где вместо H_γ следует записать

$$\begin{aligned} & \xi'_\gamma \xi'_{p-\gamma} + 2\omega(\xi_\gamma \eta'_{p-\gamma} + \xi_{p-\gamma} \eta'_\gamma) + \omega^2 \xi_\gamma \xi_{p-\gamma} + \eta'_\gamma \eta'_{p-\gamma} + 2\xi'_\gamma \xi_{p-\gamma} + \\ & + \mu \left[-L_\gamma \xi_\gamma \xi_{p-\gamma} + M_\gamma (\xi_\gamma \eta_{p-\gamma} + \eta_\gamma \xi_{p-\gamma}) + N_\gamma \eta_\gamma \eta_{p-\gamma} \right]; \end{aligned}$$

коэффициенты L_γ , M_γ , N_γ выражаются следующими формулами:

$$\begin{aligned} L_\gamma &= \sum \left(\frac{\sin^2 \gamma \psi \cos^2 \psi}{4 \sin^3 \psi} - \frac{\cos^2 \gamma \psi}{2 \sin \psi} \right), \\ M_\gamma &= \sum \frac{\sin 2\gamma \psi \cos \psi}{8 \sin^2 \psi}, \\ N_\gamma &= \sum \left(\frac{\sin^2 \gamma \psi \cos^2 \psi}{2 \sin^3 \psi} + \frac{\sin^2 \gamma \psi}{4 \sin \psi} \right). \end{aligned}$$

Тогда уравнения Лагранжа примут вид

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial H_\gamma}{\partial \xi'_\gamma} \right) - \frac{\partial H_\gamma}{\partial \xi_\gamma} = 0,$$

откуда получим, исключив значки γ ,

$$\begin{aligned} \xi'' - \xi(\omega^2 + 2) - 2\omega\eta' &= \mu[L\xi + M\eta], \\ \eta'' + 2\omega\xi' &= \mu[M\xi + N\eta]. \end{aligned}$$

Уравнение для λ^2 запишется как

$$(\lambda^2 - \omega^2 - 2 - L\mu)(\lambda^2 + N\mu) - (\mu^2 M^2 - 4\omega^2 \lambda^2) = 0.$$

Обсуждение уравнений. При любом значении γ корни данного уравнения для λ^2 должны быть вещественными и отрицательными. Очевидно, что это условие будет выполняться при достаточно малом значении μ ; как показал Максвелл, μ должно быть меньше $\frac{2, 3}{p^3}$. При

таких условиях μr стремится к нулю, когда r бесконечно возрастает. Здесь возникает определенная трудность, так как масса кольца, точно равная μr , становится пренебрежимо малой. Однако эта трудность исчезает сама собой, если мы предположим, что спутники распределены не на окружности, а в некотором объеме.

Если корни уравнения для λ^2 отрицательны, то можно положить

$$\xi_\gamma = Ae^{\lambda t} = Ae^{int},$$

где n — некоторое вещественное число, и, приняв затем

$$A = A_0 e^{in\varphi}, \quad B = B_0 e^{in\varphi_1},$$

запишем

$$\xi_\gamma = A_0 e^{int+i\varphi}, \quad \eta_\gamma = B_0 e^{int+i\varphi_1}.$$

Одно частное решение мы получим, если к ξ_γ, η_γ добавить решения

$$\xi_\beta = 0, \quad \eta_\beta = 0, \quad \beta \neq \gamma.$$

Тогда можно найти частное решение для ρ_k , положив

$$\rho_k = A_0 e^{i(nt+\beta+2k\gamma\theta)};$$

добавив к этому решению сопряженное к нему мнимое число, получим два решения вида

$$\rho_k = A_0 \cos(nt + \varphi + 2k\gamma\theta), \quad \sigma_k = B_0 \cos(nt + \varphi + 2k\gamma\theta).$$

Вообразим систему координатных осей, которая всегда следует за спутником M_k при его невозмущенном движении, причем одна из этих осей совпадает с радиусом OM_k ; значения ρ_k и σ_k становятся в этом случае координатами спутника относительно данной системы. Кроме того, мы видим, что спутник описывает относительно этих осей малый эллипс.

Перейдем к траектории следующего спутника, заменив k на $k+1$; второй спутник, таким образом, отстает от первого и так далее. Величина отставания, которую мы назовем запаздыванием, равна $\gamma\theta$. Если число $k\gamma\theta$ кратно 2π , спутник $k+1$ занимает то же положение, что и первый, положение спутника $k+2$ совпадает с положением второго спутника и т. д.

Движение словно бы передается от одного спутника к другому с определенным запаздыванием. Можно сказать, что движение передается как волна, длина которой $\frac{2\pi}{\gamma}$ [23].

Наиболее опасными для устойчивости являются короткие волны, т. е. более всего угрожают устойчивости движения волны, соответствующие большим значениям γ . Возьмем достаточно большое n ; при больших γ волна станет очень короткой, тогда два соседних спутника смогут весьма ощутимо приблизиться друг к другу, и их взаимное притяжение перестанет быть пренебрежимо малым по сравнению с притяжением Сатурна.

Общая масса кольца μp , как уже отмечалось, должна быть меньше $\frac{2,3}{p^2}$, например, если $p = 100$, то масса должна быть меньше $\frac{2,3}{10\,000}$; здесь теория Максвелла несколько неудобна. Однако эти неудобства искусственны, так как выдвинутая нами гипотеза чересчур проста, и следует все-таки предположить, что спутники занимают определенный объем пространства.

Возмущение, вносимое движением одного спутника в движение другого, есть величина порядка $\frac{\mu}{\delta^3}$, где δ — расстояние между спутниками.

Если спутники распределены по окружности длины l , то $\delta = \frac{l}{p}$. Движение будет устойчивым до тех пор, пока возмущение не превышает некоторого заданного значения A . Таким образом, в рамках гипотезы о спутниках, распределенных по окружности, необходимо, чтобы выполнялось неравенство

$$\frac{\mu p^3}{l^3} < A,$$

или

$$\mu < \frac{Al^3}{p^3}.$$

Если спутники распределены по кольцу, заключенному между двумя окружностями, находящимися на расстоянии, сравнимом с длиной одной из них, то число спутников сравнимо с p^2 . Если все спутники находятся внутри кольца ограниченного объема, и их число сравнимо с p^2 , то масса кольца равна μp^3 , а условие равновесия имеет вид

$$\mu p^3 < Al^3.$$

Следовательно, масса кольца не должна превышать некоторого предела, который не зависит от числа спутников.

Устойчивость жидкого кольца. Теперь, следуя Максвеллу, рассмотрим внимательнее устойчивость движения для случая либо жидкого, либо состоящего из отдельных частиц, кольца. Рассуждения, приведенные в этой части работы Максвелла, не вполне строги и даже не вполне ясны; выводы, однако, сделаны верные. Вероятно, строгие вычисления привели бы к результатам, несколько отличным от тех, к которым придем мы.

Пусть x, y, z — координаты точки при невозмущенном движении, u, v, w — составляющие ее скорости, а

$$x + \xi, \quad y + \eta, \quad z + \zeta$$

и

$$u + \frac{d\xi}{dt}, \quad v + \frac{d\eta}{dt}, \quad w + \frac{d\zeta}{dt}$$

— те же значения при возмущенном движении.

Живая сила системы имеет вид

$$T = \int \left[\left(u + \frac{d\xi}{dt} \right)^2 + \left(v + \frac{d\eta}{dt} \right)^2 + \left(w + \frac{d\zeta}{dt} \right)^2 \right] \frac{\rho d\tau}{2};$$

потенциальная энергия U равна

$$\int \frac{(V + V')(\rho + \rho')}{2} d\tau,$$

где V и ρ — потенциал и плотность при невозмущенном движении, а $V + V'$ и $\rho + \rho'$ — те же величины при движении возмущенном. Функция U является суммой четырех интегралов

$$\int \frac{V\rho d\tau}{2} + \int \frac{V\rho' d\tau}{2} + \int \frac{V'\rho d\tau}{2} + \int \frac{V'\rho' d\tau}{2}.$$

Первый интеграл есть постоянная величина и не зависит от ξ, η, ζ , второй и третий равны, как мы знаем с начала данного курса. Они представляют собой половину потенциальной энергии, связанную с притяжением возмущенной (невозмущенной) компоненты плотности кольца гравитационным полем невозмущенной (возмущенной) системы.

Пренебрегая кубами ξ, η, ζ , положим

$$V + V' = V + \xi \frac{\partial V}{\partial x} + \eta \frac{\partial V}{\partial y} + \zeta \frac{\partial V}{\partial z} + \frac{1}{2} \sum \xi^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \sum \eta \zeta \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial z}.$$

Сумму второго и третьего интегралов можно записать в виде

$$\int \left(\sum \frac{\partial V}{\partial x} \xi + \frac{1}{2} \sum \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \xi^2 + \sum \zeta \eta \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial z} \right) \rho d\tau.$$

Теперь следует вычислить последний интеграл. Можно предположить, что смещение (ξ, η, ζ) является суммой двух смещений: одно происходит в направлении движения, другое — перпендикулярно ему. Положим

$$\xi = \xi_1 + \xi_2, \quad \eta = \eta_1 + \eta_2, \quad \zeta = \zeta_1 + \zeta_2.$$

Впрочем, из известных формул для продольных и поперечных колебаний известно, что уравнение

$$\rho \xi_1 dx + \rho \eta_1 dy + \rho \zeta_1 dz = d\theta$$

представляет собой полный дифференциал и что имеет место равенство

$$\frac{d(\rho \xi_2)}{dx} + \frac{d(\rho \eta_2)}{dy} + \frac{d(\rho \zeta_2)}{dz} = 0.$$

С другой стороны, имеем соотношение

$$\rho' + \frac{d(\rho \xi)}{dx} + \frac{d(\rho \eta)}{dy} + \frac{d(\rho \zeta)}{dz} = 0.^1$$

Исходя из вышесказанного, можно записать

$$\int V' \rho' d\tau = \frac{1}{8\pi} \int \rho^2 d\tau [\xi_1^2 + \eta_1^2 + \zeta_1^2].$$

Допустим теперь, что подвижная система координат вращается вокруг оси симметрии кольца со скоростью ω . Выражение для U не изменится, а функция T при таких условиях примет вид

$$\int \left\{ \left[u + \frac{d\xi}{dt} - \omega(y + \eta) \right]^2 + \left[v + \frac{d\eta}{dt} - \omega(x + \xi) \right]^2 + \left(w + \frac{d\zeta}{dt} \right)^2 \right\} d\tau.$$

¹Эта формула следует из закона сохранения массы.

Условие равновесия требует, чтобы значение

$$\int (T - U) dt$$

было максимальным. Учитывая известное нам соотношение

$$\rho \xi_1 dx + \rho \eta_1 dy + \rho \zeta_1 dz = d\theta,$$

получим уравнения для ξ , η и ζ :

$$\xi'' - 2\omega\eta' = \frac{\partial P}{\partial \xi} + \frac{\partial \theta}{\partial x},$$

$$\eta'' - 2\omega\xi' = \frac{\partial P}{\partial \eta} + \frac{\partial \theta}{\partial y},$$

$$\zeta'' = \frac{\partial P}{\partial \zeta} + \frac{\partial \theta}{\partial z},$$

где P — полином второго порядка по (ξ, η, ζ) , а θ — вспомогательная переменная, связанная с тремя предыдущими соотношением

$$\Delta\theta = \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z}.$$

Закключение. Максвелл получил следующий результат: для того чтобы равновесие было устойчивым, ρ должно быть меньше $\frac{1}{300}$.¹

Этот результат верен как для скопления космической пыли, так и для жидкого кольца, однако в случае жидкого кольца имеется одно дополнительное условие — давление² на его поверхности должно быть направлено внутрь. Лаплас установил для случая жидкого кольца эллиптического сечения, что плотность вещества кольца на его наружном крае должна превышать $\frac{1}{2}$, а на внутреннем — 2.

Существуют ли для данного случая другие фигуры равновесия? Вспомним, что должно выполняться условие

$$\omega^2 < 2\pi\rho.$$

¹Это — так называемый предел Максвелла.

²На самом деле, градиент давления.

Величину ω в этой формуле следует брать равной угловой скорости спутника, орбита которого совпадает с кольцом. Таким образом, обозначив массу Сатурна через M , а радиус кольца через L , получим

$$\omega^2 = \frac{M}{L^3}.$$

Если ρ_0 — плотность Сатурна, а R — его радиус, то

$$M = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_0.$$

Отсюда

$$2\pi\rho > \frac{4}{3}\pi \frac{R^3}{L^3} \rho_0,$$

$$\frac{\rho}{\rho_0} > \frac{2}{3} \left(\frac{R}{L} \right)^3.$$

Значение правой части неравенства больше $\frac{1}{16}$. Сравнив этот результат с предыдущим, мы убеждаемся, что кольцо Сатурна не может быть жидким. Впрочем, как мы уже знаем, наблюдения показывают, что это кольцо, вероятно, состоит из множества мелких частиц.

Комментарии редактора

[1] Получено важное неравенство Пуанкаре; для неоднородных фигур относительного равновесия оно выглядит так: $\omega^2 \leq 2\pi G\bar{\rho}$, где $\bar{\rho}$ — средняя плотность. Выполнение этого неравенства гарантирует направление внутрь полной силы тяжести и неотрицательность давления. Впоследствии Крудели в два раза усилил это неравенство (только при $\rho = \text{const}$). Для общей теории фигур относительного равновесия эти два критерия имеют, однако, несколько разное значение: если предел Крудели может быть превзойден для составных фигур равновесия, то предел Пуанкаре — это своего рода «табу», которое не дано нарушить никакой жидкой фигуре относительного равновесия.

[2] Во-первых, название раздела неудачно. Уместнее был бы заголовок «Теорема Ляпунова», поскольку под теорией великого русского математика в этой области науки все понимают совсем иное — его обширные и грандиозные исследования по фигурам равновесия и их устойчивости.

Далее, вопрос в тексте «Существуют ли другие фигуры равновесия?» в данном контексте сейчас звучит просто риторически. Из теоремы Лихтенштейна о существовании у любой фигуры относительного равновесия экваториальной плоскости симметрии немедленно следует, что кроме сферы, других фигур равновесия для невращающейся жидкой массы не существует.

Само доказательство теоремы Ляпунова о так называемой потенциальной энергии сферы Пуанкаре проводит оригинальным и более физичным (но вовсе не более строгим!) способом, привлекая понятие о емкости. Обратим внимание на важную, чисто физическую формулу $S^2 = 12\pi TC$ (см. с. 26). Впоследствии метод емкости активно разрабатывался (см., например, {11}¹). Однако необходимо отметить, что доказательство теоремы у Пуанкаре совершенно неоправданно затянuto, и почти весь раздел «Сфера — единственная фигура равновесия», кроме буквально двух последних фраз, можно изъять как не имеющий абсолютно никакого отношения к проводимому доказательству. И вслед за словами «... сферическое тело имеет наименьшую электростатическую емкость» нужно сразу переходить к словам «Но энергия тела обратно пропорциональна...».

¹В данном разделе в фигурных скобках даны ссылки на список рекомендуемой литературы, приведенный после комментариев.

Но ненужное здесь может пригодиться в другом. В этом «лишнем» куске текста есть намек на любопытную идею о разделении полной гравитационной энергии тела на две составляющие — внутреннюю и внешнюю. Нельзя, конечно, согласиться с выводом о том, что «... если тело находится в равновесии, соотношение между частью интеграла, взятой по внутреннему объему, и его частью, взятой по внешнему объему, постоянно и равно $1/5$ ». Я ранее доказал, что этот вывод верен только для однородной сферы, и даже в случае сфероида ситуация уже значительно сложнее. Впрочем, идея о разделении может быть применена как один из составных элементов при выводе принципиально нового выражения для угловой скорости у фигур относительного равновесия {15}.

[3] Совершенно нетривиальное обобщение теоремы Ляпунова дано в статье {14}.

[4] Пуанкаре подводит интуиция, и главная мысль в оставшейся части раздела является неудачной. Он почему-то допускает, а его коллега Аппель {3} даже заостряет на этом внимание, что поместив жидкую фигуру относительного равновесия во внешнюю среду, обеспечивающую постоянное давление на ее границе, можно такую фигуру заставить вращаться быстрее, чем это допускает неравенство $\omega^2 < 2\pi G\bar{\rho}$. Это, однако, невозможно. Дело в том, что если $\Delta U = 2\omega^2 - 4\pi G\bar{\rho} > 0$, то полный потенциал U имеет минимум внутри тела, т. е. при переходе из внутренней точки фигуры на ее поверхность эта функция U испытывает возрастание и $U_0 > U(x, y, z)$. Однако, как отметил впервые Лихтенштейн, такое возрастание полного потенциала означало бы и рост к поверхности потенциала гравитационного, что можно продемонстрировать, выбирая путь перехода на поверхность параллельно оси вращения. Но, и в этом все дело, в теории потенциала хорошо известно, что гравитационный (ньютоновский) потенциал не может иметь минимума внутри самой притягивающей массы. Это обстоятельство и делает абсурдным предположение о возможности $\omega^2 > 2\pi G\bar{\rho}$.

Однако то, что не проходит для объемных фигур, может быть достигнуто для фигур двумерных. Правда, в одном сугубо частном случае. Таков случай жидкого кругового гравитирующего цилиндра, имеющего бесконечную длину и помещенного во внешнюю среду: для него предел Пуанкаре может быть превышен {9}. Однако в таком динамическом режиме цилиндр будет явно неустойчивым.

[5] Вскоре (1890 г.) Пуанкаре докажет более общую теорему о невозможности для фигуры относительного равновесия находиться в состоянии прецессии. Одно уточнение к этой теореме сделал В. А. Антонов (в заметке «О невозможности свободной прецессии жидкой массы, достигшей относи-

тельного равновесия» {16}). При значительно более общих условиях невозможность прецессии доказана в статье {15}.

[6] Пуанкаре не договаривает: вращение фигуры относительного равновесия возможно только вокруг наименьшей из главных осей эллипсоида инерции. Несколько иначе обстоит дело у фигур с внутренним течением {8, 9} и у звездных систем {9}.

[7] Сейчас принято говорить о динамической или колебательной (вместо временной) неустойчивости. Самый большой вклад в развитие теории устойчивости внес А. М. Ляпунов.

[8] В отличие от твердого тела у жидкой фигуры относительного равновесия нет выбора: ее равновесие вообще несовместимо с вращением вокруг средней и большой осей эллипсоида инерции (см. комментарий [6]).

[9] Речь идет об очевидном, в общем-то, факте: из максимума $W + \frac{J\omega^2}{2}$ следует, что и разность $W - \frac{J\omega^2}{2}$ будет иметь максимум; обратное же не верно.

[10] Ахиллесовой пятой в проблеме Клеро следует признать вопрос о форме уровенных поверхностей. Сам Клеро, не мудрствуя и ничего не доказывая, просто выбрал сжатые сфероиды по принципу «что ближе лежит». Попал в точку! Лаплас и Лежандр, пользуясь разложением потенциала по сферическим функциям, уже пытались обосновать такой выбор. Пуанкаре в данном разделе модифицирует метод Лапласа и не повторяет ошибок последнего при разложении потенциала в ряды. Однако в принципиальном отношении ничего нового здесь мы не видим, и ситуация остается столь же неудовлетворительной, как и раньше. Принято говорить, что задача о фигуре равновесия неоднородной жидкой массы решается в так называемом первом приближении (когда отбрасываются все величины порядка ω^4 и выше). Однако все попытки решить проблему уже во втором приближении с треском проваливаются по той простой причине, что неоднородные фигуры не могут иметь строго эллипсоидальную форму или иметь эллипсоидальную стратификацию внутри. И возникает вопрос, что же это за первое приближение, если мы не знаем, к чему приближаться, ведь точное решение вообще неизвестно. Нелепость ситуации отразил Ляпунов: «... совершенно неправильно искать элементы эллипсоидов в первых приближениях, ибо это элементы тех эллипсоидов, которые сами представляют неизвестные поверхности в первом приближении» {4}. Так что уверенный тон данной книги не может никак заменить собой истинно строгого анализа проблемы.

[11] Содержание этого раздела можно резюмировать так: формула (2) и неравенство $-3 \leq \frac{rD'}{D} \leq 0$ показывают, что параметр концентрации $\frac{rD'}{D} = 0$

при $r \rightarrow 0$. Тогда, на основании известных свойств особых точек дифференциальных уравнений первого порядка, можно утверждать, что и уравнение (12) имеет только одно решение, удовлетворяющее условию $\eta = 0$ при $r \rightarrow 0$.

[12] Здесь досадная путаница в выводах. Равенство $\eta = 3$ относится, конечно, к телу, вся масса которого собрана в центре. Поэтому в последнем неравенстве случай $e = \frac{\varphi}{2}$ (предел Гюйгенса) соответствует как раз фигуре с предельной концентрацией, а $e = \frac{5}{4}\varphi$ (Ньютон, Начала) — фигуре с однородным распределением плотности.

[13] В этом разделе установлено, что все случаи, кроме $n = 1$ и $n = 2$, являются тривиальными.

[14] Численные оценки в этом разделе сделаны для того, чтобы выяснить, насколько первое приближение в теории Клеро согласуется с наблюдаемыми характеристиками для Земли. Пуанкаре верно отмечает, что имеющее место разногласие не удастся устранить даже с учетом второго приближения (что и не удивительно, см. комментарий [10]). Сейчас полагают, что расхождение теории и наблюдений является следствием особенностей строения нашей планеты; в поверхностной оболочке Земли глубиной 90–100 км условия гидростатического равновесия выполняются лишь приближенно, поэтому теория Клеро здесь неприменима! Замечание Пуанкаре о малой вероятности того, что Земля имеет жидкое ядро, разумеется, неверно. Это замечание выглядит тем более странным, что именно Пуанкаре разработал гидродинамическую теорию жидкого ядра Земли.

[15] Вывод последнего выражения содержит у Пуанкаре шесть упущений. В исправленном виде последние формулы будут выглядеть так:

$$g = M - 2M\zeta + \frac{3}{2}(C - A)Y - \frac{2\omega^2}{3} - \frac{1}{3}\omega^2 Y;$$

следующая формула верна;

$$g = g_0 \left(1 - \frac{2e_1 Y}{3}\right) + g_0 \left(e_1 - \frac{\varphi}{2}\right) Y - \frac{2\varphi g_0}{3} - \frac{\varphi g_0 Y}{3},$$

$$\frac{g}{g_0} = 1 + \frac{e_1 Y}{3} - \frac{5\varphi}{6} Y - \frac{2\varphi}{3} = 1 - \frac{2\varphi}{3} - \frac{Y}{3} \left(\frac{5\varphi}{2} - e_1\right).$$

Кроме того, под формулой Клеро принято понимать выражение (φ — широта)

$$\frac{g}{g_e} = 1 + \left(\frac{5}{2}\varphi - e_1\right) \sin^2 \varphi.$$

Последнее следует из формулы Пуанкаре с учетом того, что $Y = 1 - 3 \sin^2 \varphi$, а g_e на экваторе отнюдь не равна $g_0 = \frac{GM}{r_1^2}$ и дается выражением

$$g_e = g_0 \left(1 + \frac{e_1}{3} - \frac{3}{2} \varphi \right).$$

Все расчеты ведутся в первом приближении.

[16] Величина l по смыслу должна быть положительной, поэтому знаки «—» здесь являются лишними.

[17] Однако это важное утверждение Пуанкаре ничем не обосновано! Смысл его в том, что для каждого $n \geq 2$ существует одна и только одна фигура бифуркации. Для $n = 3$ это строго доказал А. М. Ляпунов. Пуанкаре же здесь ничего не доказывает. Более того, в изложении вопроса Appellem ({3}, стр. 186), где дана ссылка на Клейна, есть прямое недоразумение, ибо последовательность эллипсоидов Якоби не является последовательностью софокусных друг другу эллипсоидов. Но именно эту софокусность ошибочно и подразумевают здесь Пуанкаре и Аппель.

[18] Эту неэллипсоидальную фигуру равновесия называют грушевидной. У самого Пуанкаре эскиз ее неточен. Более правильно форму грушевидной фигуры выяснил Дарвин {8}; контур этой фигуры оказывается более вытянутым и не имеющим точек перегиба и, тем более, участков с отрицательной кривизной ({3}, стр. 214).

[19] Здесь говорится о том, каким образом заканчивается последовательность эллипсоидов Якоби. При $a \rightarrow \infty$ эллипсоид вытягивается и образуется тонкая игла круглого сечения; угловая скорость убывает до нуля, момент вращения возрастает до бесконечности. В этом пределе $b \rightarrow c$, и так как все корни характеристического полинома находятся именно в этом стягивающемся в точку интервале, то вслед за бифуркацией $n = 3$ (груша) быстро добавляются все новые неустойчивости. Поэтому для гармоник высокого порядка этот иглообразный эллипсоид становится аналогичен невращающемуся жидкому круговому цилиндру, неустойчивому на распад в виде отдельных сферических сгустков.

[20] В этом абзаце путаница, так как вдоль последовательностей Маклорена и Якоби описывается поведение не углового момента M (пусть и приведенного), а совсем другой величины — угловой скорости ω . Сам же угловой момент возрастает до бесконечности вдоль обеих последовательностей фигур равновесия. Ссылка на Лиувилля, конечно, неправомерна.

[21] При углублении теории выяснилось, что метод обмена устойчивостью в изложенной здесь постановке не имеет той широкой области применения, которую ему прочили. Так, он верно освещает ситуацию с передачей вековой устойчивости от сфероидов Маклорена к эллипсоидам Якоби, но дает сбой, предсказывая переход устойчивости от них к грушевидным фигурам. Это привело Пуанкаре к весьма досадной ошибке в полемике, завязавшейся вокруг вопроса об устойчивости новых конфигураций. Благодаря Шварцшильду (1896), метод обмена устойчивостью был дополнен необходимым для выяснения истины анализом поведения углового момента при образовании бифуркационных фигур (см. комментарий [22]). Интересна физическая трактовка этой проблемы. У самого Пуанкаре неявно полагалось, что при бифуркации внутреннее трение в жидкости никак себя не проявляет. И это действительно имеет место при бессдвиговой деформации жидкого сфероида в трехосный эллипсоид. Но уже при образовании из эллипсоида Якоби грушевидной фигуры путем наложения на него возмущений с третьей гармоникой жидкие слои тела испытывают взаимные смещения, и эффекты внутренней вязкости здесь себя проявляют. Похоже, однако, что Пуанкаре ни в какой мере не прислушался к аргументам, высказанным Шварцшильдом {3}.

[22] Надежда Пуанкаре на то, что угловой момент критического эллипсоида Якоби имеет минимум в сравнении со значением этой характеристики у ответвляющейся грушевидной фигуры в данном контексте выдает его сокровенную веру в устойчивость грушевидных конфигураций. Однако ни доказать, ни опровергнуть это предположение сам он не смог. Пуанкаре скончался в 1912 г., так и не узнав истину в этом вопросе. В отсутствии строгого доказательства дело зашло слишком далеко. Под влиянием авторитета Пуанкаре группа видных ученых того времени (Кельвин, Тейт, Дарвин) выдвинули целую программу по изучению эволюции и распада грушевидной и еще более сложных фигур на два или несколько тел. Таким образом они пытались объяснить загадку происхождения двойных и кратных звезд и даже планетных систем. Однако постепенно энтузиазм сторонников этой программы был охлажден: в острой полемике с Дарвином Ляпунов в 1912 г. установил неустойчивость грушевидных фигур. Конкретно, Ляпунов установил, что грушевидная фигура обладает меньшим угловым моментом, чем исходный эллипсоид Якоби. Впоследствии эти результаты подтвердил Джинс (1916 г.). Между прочим, угловая скорость при такой бифуркации все же возрастает!

Эти важные результаты иллюстрируют следующие две формулы:

$$\mu_{\text{гр}} = \mu_{\text{як}}(1 - 0,06765\varepsilon^2), \quad \omega_{\text{гр}}^2 = \omega_{\text{як}}^2(1 + 0,05227\varepsilon^2),$$

где момент вращения μ и угловая скорость ω нормированы, а $\varepsilon \ll 1$ — параметр отклонения груши от исходного эллипсоида.

[23] Излагаемая здесь теория Максвелла устойчивости кольца Сатурна замечательна как первый образец теории, учитывающей коллективные явления в задаче N гравитирующих тел.

Рекомендуемая литература

Есть немало книг на русском языке, посвященных различным аспектам теории фигур равновесия. Ниже будут перечислены некоторые из них, включая два обзора и две статьи. Книги эти не предназначены для легкого чтения, но «без напора и вдохновения в науке делать нечего».

С исторической точки зрения интересна книга

1. Клеро А. *Теория фигуры Земли*: сер. Классики науки. — М.: Издательство АН СССР, 1947.

Не потеряла своего значения монография

2. Пицетти П. *Основы механической теории фигур планет*. — М.: ГТТИ, 1933.

Подробно излагает вклад Пуанкаре

3. Аппель К. *Фигуры равновесия вращающейся однородной жидкости*. — Л.–М.: ОНТИ, 1936.

Труды А. М. Ляпунова являют нам эталон математической строгости. Его вклад в теорию фигур равновесия изложен в трех указанных ниже томах

4. Ляпунов А. М. *Собрание сочинений*, тт. III, IV. — М.: Издательство АН СССР, т. V. — М.: Наука, 1965.

С изложением подхода Ляпунова и результатов Лихтенштейна можно ознакомиться в книге

5. Лихтенштейн Л. *Фигуры равновесия вращающейся жидкости*. — М.: Наука, 1965.

а также в удачном и глубоком обзоре

6. Сретенский Л. Н. *Теория фигур равновесия жидкой вращающейся массы* // Успехи математических наук, вып. 5, 1938.

Ясное изложение элементов теории см. в учебнике

7. Субботин М. Ф. *Курс небесной механики*, т. 3. — М.–Л.: Гостехиздат, 1949.

Почти все, чего касался Чандрасекхар, отмечено знаком качества.

8. Чандрасекхар С. *Эллипсоидальные фигуры равновесия*. — М.: Мир, 1972.

Некоторые новые результаты в теории жидких, включая элементы теории фигур равновесия звездных систем, даны в книге

9. Кондратьев Б. П. *Динамика эллипсоидальных гравитирующих фигур*. — М.: Наука, 1989.

Несколько специфична книга

10. Буллен К. Е. *Плотность Земли*. — М.: Мир, 1978.

Математическим аспектам теории потенциала посвящено исследование

11. Уэрмер Дж. *Теория потенциала*. — М.: Мир, 1980.

С современным состоянием теории знакомит монография

12. Тассуль Ж.-Л. *Теория вращающихся звезд*. — М.: Мир, 1982.

и обзор

13. Антонов В. А. *Равновесие и устойчивость гравитирующих систем* // Итоги науки, серия Астрономия, т. 10. — М.: Наука, 1975.

Иногда сфера передает свои королевские полномочия: см. заметку

14. Antonov V. A., Kondratyev B. P. *On the conditional extremum for the gravitational energy inherent to the oblate spheroid* // Astronomical and Astrophysical Transactions, 1995, Vol. 7, pp. 173–176.

Три новых теоретических результата в статье

15. Kondratyev B. P. *Some principal questions of the theory of equilibrium figures* // Кинематика и физика небесных тел, Приложение, № 2, 1999, стр. 16–21.

16. Антонов В. А. *О невозможности свободной прецессии жидкой массы, достигшей относительного равновесия* // Труды астрономической обсерватории Ленинградского университета, 1973, 29, стр. 150–152.

Анри Пуанкаре

ФИГУРЫ РАВНОВЕСИЯ ЖИДКОЙ МАССЫ

Дизайнер М. В. Ботя

Технический редактор А. В. Ширококов

Компьютерный набор и верстка С. В. Высоцкого

Корректор М. А. Ложкина

Подписано к печати 21.11.00. Формат $60 \times 84\frac{1}{16}$.

Печать офсетная. Усл. печ. л. 12,09. Уч. изд. л. 12,34.

Гарнитура Computer Modern Roman. Бумага офсетная № 1.

Тираж 1000 экз. Заказ №

Научно-издательский центр «Регулярная и хаотическая динамика»

426057, г. Ижевск, ул. Пастухова, 13.

Лицензия на издательскую деятельность ЛУ № 084 от 03.04.00.

<http://rcd.ru> E-mail: borisov@uni.udm.ru

Отпечатано в полном соответствии с качеством

предоставленных диапозитивов в ГИПП «Вятка».

610033, г. Киров, ул. Московская, 122.
